CUPRINS

I. Noţiuni teoretice 1

1. Numere complexe. Forma algebrică a unui număr complex . . 1
2. Reprezentarea geometrică a numerelor complexe 2
3. Forma trigonometrică a unui număr complex 3
4. Interpretări geometrice ale unor relaţii între numerele complexe 5
5. Aria unui poligon în complex 8
6. Proprietăţi geometrice exprimate în complex 10
7. Triunghiuri asemenea 12
8. Geometrie analitică în complex 14
9. Transformări geometrice 17

II. Aplicaţii demonstrate direct 19

III. Relaţii metrice 52

IV. Inegalităţi geometrice deduse din proprietăţile numerelor complexe 66

V. Inegalităţi cu numere complexe 72

VI. Geometria triunghiului 80

VII. Probleme de coliniaritate 91

VIII. Probleme de concurenţă 97

IX. Probleme diverse 102

X. Aplicaţiile numerelor complexe în trigonometrie 122

XI. Probleme propuse la concursurile de matematică 133

XII. Probleme propuse 158

Bibliografie 165

Capitolul I

NOŢIUNI TEORETICE

1. Numere complexe. Forma algebrică a unui număr complex

Fie $\mathbf{R}$ corpul comutativ al numerelor reale.

Definiţie. Se numeşte număr complex, orice element al mulţimii $\mathbf{R} \times \mathbf{R} = \mathbf{R}^2$, pe care se introduc următoarele operaţii interne: adunare şi înmulţire, astfel:

$$\forall z = (a, b) \in \mathbf{R}^2, \forall z' = (a', b') \in \mathbf{R}^2,$$
$$z + z' = (a + a', b + b')$$
$$zz' = (ab - a'b', ab' + a'b)$$

Mulţimea numerelor complexe se notează cu $\mathbf{C}$ şi formează împreună cu operaţiile definite mai sus un corp comutativ. Elementul neutru la adunare (numărul complex zero) este $(0, 0)$, iar elementul opus lui $z = (a, b) \in \mathbf{C}$ este $-z = (-a, -b) \in \mathbf{C}$. Pe de altă parte, elementul neutru la înmulţire este numărul complex $(1, 0)$.

Considerăm submulţimea $\mathbf{R}' = \{(a, 0) \mid a \in R\}$. Funcţia $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}'$; $f(a) = (a, 0)$ $\forall a \in R$ este bijecţie. Mai mult, întrucât $\mathbf{R}'$ este subcorp al lui $\mathbf{C}$, f stabileşte un izomorfism de la corpul numerelor reale la $\mathbf{R}'$. Acest izomorfism permite identificarea numărului complex $(a, 0)$ cu numărul real a şi reciproc, ceea ce conduce la interpretarea numerelor reale cu numere complexe. În particular, numerele complexe $(0, 0)$ şi $(1, 0)$ se identifică cu numerele reale 0 şi 1.

Dacă notăm numărul complex $(0, 1)$ cu i, atunci pentru orice număr complex $z = (a, b) \in \mathbf{C}$ relaţia $(a, b) = (a, 0) + (b, 0)(0, 1)$ se mai poate scrie sub forma: $z = a + bi$, numită forma algebrică a numărului complex $z = (a, b)$. Numărul complex $i = 0 + 1i$ se numeşte unitatea imaginară. Numerele de forma bi, $b \in \mathbf{R}$ se numesc numere imaginare.

Dacă $z = a + bi$, atunci a se numeşte partea reală a lui z şi se notează cu $Re(z)$, iar b se numeşte coeficientul părţii imaginare a lui z şi se notează cu $Im(z)$.

Are loc relaţia:

$$i^2 = i \cdot i = -1$$

Fie $z = a + bi \in \mathbf{C}$. Numărul complex $\bar{z} = a - bi$ se numeşte conjugatul lui z.

Un număr complex este număr real dacă şi numai dacă coincide cu conjugatul său.

Se stabilesc fără dificultate proprietăţile:

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z}_1 + \overline{z}_2, \quad \overline{z_1 z_2} = \overline{z}_1 \overline{z}_2 \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbf{C}.$$

Se numeşte modulul numărului complex $z = a + bi$, numărul real pozitiv:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad |z| = 0$$

dacă şi numai dacă $z = 0$.

Este evident că $|z| = |\overline{z}|$ şi că $|z| = \sqrt{z \cdot \overline{z}}$.

Următoarele inegalităţi sunt o consecinţă imediată a definiţiei modulului:

a) $|Rez| \le |z| \le |Rez| + |Imz|, \quad (\forall) z \in \mathbf{C}$

b) $|Imz| \le |z| \le |Rez| + |Imz|, \quad (\forall) z \in \mathbf{C}$

c) $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2\left(|z_1|^2 + |z_2|^2\right), \quad (\forall) z_1, z_2 \in \mathbf{C}.$

Modulul posedă, de asemenea, următoarele proprietăţi:

a) $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$

b) $(\forall) z_1, z_2 \in \mathbb{C} \quad |z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|.$

Ultima relaţie se poate generaliza astfel:

Dacă $z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbf{C}$, $n \ge 2$ atunci:

$$|z_1 + z_2 + \ldots + z_n| \le |z_1| + |z_2| + \ldots + |z_n|.$$

c) Dacă $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$ atunci $\big||z_1| - |z_2|\big| \le |z_1 - z_2|$.

De asemenea, avem şi formulele:

$$\overline{z_1 + z_2 + \ldots + z_n} = \overline{z}_1 + \overline{z}_2 + \ldots + \overline{z}_n$$

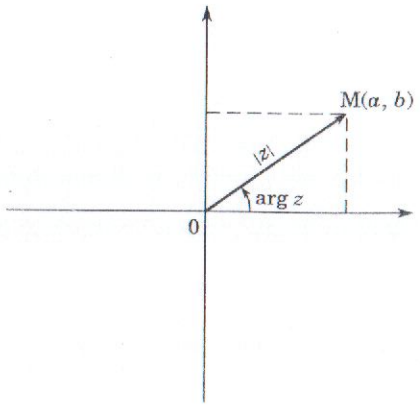
$$\overline{z_1 z_2 \ldots z_n} = \overline{z}_1 \overline{z}_2 \ldots \overline{z}_n.$$

2. Reprezentarea geometrică a numerelor complexe

Se ştie din geometria elementară că există o bijecţie între mulţimea punctelor unei drepte şi mulţimea **R** (axioma riglei), prin intermediul unui sistem de coordonate pe dreaptă. De asemenea, este asigurată existenţa unui sistem de coordonate în orice plan din spaţiul euclidian.

Se consideră un plan π raportat la un sistem de coordonate rectangular xOy. Fiecărui număr complex $z = a + bi \in \mathbf{C}$, i se poate asocia punctul M din planul π, care are coordonatele (a, b). Punctul $M(a, b)$ se numeşte imaginea geometrică a lui z, iar z se numeşte afixul punctului M. Corespondenţa $z \in C \to M \in \pi$ este o bijecţie. În această reprezentare geometrică a lui z, lungimea segmentului $|OM|$ este $|z|$.

În reprezentarea geometrică a numerelor complexe în planul π, numerele reale au imaginile pe axa absciselor Ox, iar numerele imaginare au imaginile pe axa ordonatelor Oy. De aceea Ox se mai numeşte axa reală, Oy – axa imaginară, iar π – planul complex.



Să considerăm mulţimea vectorilor din planul π care au originea în **O**. Atunci, fiecărui punct $M \in \pi$ i se asociază vectorul OM şi reciproc. În acest fel, există o bijecţie între mulţimea numerelor complexe şi mulţimea vectorilor din planul π, având originea **O**. Această reprezentare vectorială a numerelor complexe permite o interpretare simplă a adunării din **C**. Fie $z = a + bi$, $z' = a' + b'i$, două numere complexe având reprezentările vectoriale $\overline{OM}$ şi $\overline{OM'}$, unde $M(a, b)$, $M'(a', b')$. Pe de o parte, suma $z + z' = (a + a') + (b + b')i$, iar pe de altă parte, $\overline{OM} + \overline{OM'} = \overline{OS}$, unde $\overline{OS}$ se obţine prin adunarea vectorilor $\overline{OM}$ şi $\overline{OM'}$, după regula paralelogramului. Punctul $S \in \pi$ are coordonatele $(a + a', b + b')$, iar reprezentarea vectorială a lui $z + z'$ este $\overline{OS}$; $|OS| = |z + z'|$.

Dacă $-z = -a - bi$ este opusul lui $z = a + bi$, atunci vectorul corespunzător lui $-z$ este $\overline{OM_1}$, unde M_1 este simetricul lui M faţă de O. Se deduce, imediat că reprezentarea vectorială a diferenţei $z' - z$ este vectorul $\overline{OD}$, unde D este cel de-al patrulea vârf al paralelogramului $M'OM_1D$. D are coordonatele $(a' - a, b' - b)$.

Totodată, avem: $|OD| = |z' - z|$.

Din inegalitatea triunghiului aplicată în OMS, OMM', rezultă relaţiile:

$$|z + z'| \le |z| + |z'| \quad \text{şi} \quad |z' - z| \ge |z'| - |z|,$$

în care avem egalitate când punctele O, M şi M' sunt coliniare şi avem $OM' = kOM$, adică $z' = kz$, unde $k \in R_+$.

3. Forma trigonometrică a unui număr complex

Fie numărul complex $z = a + bi \in \mathbf{C}$ şi $M(a, b) \in \pi$, imaginea geometrică a lui z în planul π, raportat la sistemul de coordonate xOy. Coordonatele

polare ale punctului M sunt r şi t, unde $r = OM$ iar t este măsura unghiului determinat de OM şi semiaxa pozitivă OX. r este chiar $|z|$, iar t se mai notează cu ***arg z*** şi se numeşte **argumentul redus al lui z**.

Cu aceste consideraţii, $a = r\cos t$, $b = r\sin t$, iar $z = a + bi$ se scrie sub forma:

$$z = r(\cos t + i\sin t),$$

numită forma trigonometrică a lui z.

Deoarece $t \in [0°, 360°)$ sau, în radiani, $t \in [0, 2\pi)$, se defineşte argumentul numărului complex z, ca fiind:

$$\operatorname{Arg} z = \{t \mid t = \arg z + 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\}.$$

Dacă $z = a - bi$ este conjugatul lui $z = a + bi$, cu $b \neq 0$, atunci:

$$\arg\bar{z} = 2\pi - \arg z .$$

Fie $z_k = r_k(\cos t_k + i\sin t_k) \in C$, $k = 1, 2$. Atunci:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2\left[\cos(t_1 + t_2) + i\sin(t_1 + t_2)\right],$$

de unde rezultă:

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2| \text{ şi } \arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2 + 2k\pi, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Relaţie care se mai foloseşte sub forma:

$$\arg(z_1 z_2) \equiv \arg z_1 + \arg z_2 \quad (\textit{modulo } 2\pi)$$

Ultimele două relaţii se pot generaliza pentru n numere complexe, astfel:

$$|z_1 z_2 \ldots z_n| = |z_1||z_2| \ldots |z_n|$$

şi

$$\arg(z_1 z_2 \ldots z_n) = \arg z_1 + \arg z_2 + \ldots + \arg z_n + 2k\pi, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Ultima relaţie se mai foloseşte sub forma:

$$\arg(z_1 z_2 \ldots z_n) \equiv \arg z_1 + \arg z_2 + \ldots + \arg z_n \quad (\textit{modulo } 2\pi).$$

Fie:

$$z_k = r_k(\cos t_k + i\sin t_k) \in C, \quad K = 1, 2 \quad \text{cu} \quad z_2 \neq 0,$$

atunci:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left(\cos(t_1 - t_2) + i\sin(t_1 - t_2)\right),$$

de unde rezultă că:

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \text{ şi } \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2 + 2k\pi, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Ultima relaţie se mai scrie sub forma:

$$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) \equiv \arg z_1 - \arg z_2 \quad (\textit{modulo } 2\pi).$$

Dacă $z = r(\cos t + i\sin t)$ şi $n \in \mathbf{N}^*$, atunci:

$$z^n = r^n(\cos nt + \sin nt) \text{ şi}$$

$$\sqrt[n]{z} = \left\{\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{t + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{t + 2k\pi}{n}\right),\ k = 0, 1, \ldots, n - 1\right\}.$$

Utilizând notaţiile lui Euler $e^{it} = \cos t + i\sin t$, numărul complex z se scrie sub forma $z = re^{it}$, numită reprezentarea lui Euler pentru z.

Dacă:

$$z_1 = r_1 e^{it_1}, \quad z_2 = r_2 e^{it_2}, \text{ atunci}$$

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 \cdot e^{i(t_1 + t_2)},$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(t_1 - t_2)}, \quad z_2 \neq 0,$$

de unde se deduc relaţiile:

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|; \quad \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|},$$

$$\arg(z_1 z_2) \equiv \arg z_1 + \arg z_2, \quad \arg\frac{z_1}{z_1} \equiv \arg z_1 - \arg z_2 \quad (\textit{modulo } 2\pi).$$

4. Interpretări geometrice ale unor relaţii între numerele complexe

Fie π un plan dat în care s-a ales un sistem de coordonate ortogonale, definit prin reperul $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ unde $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{OA}$, $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{OB}$, $OA \perp OB$ şi o unitate de măsură $|OA| = |OB|$. Fiecărui punct P din planul π i se asociază un cuplu de numere reale (x, y), unde x este abscisa lui P iar y este ordonata lui P. Reciproc, fiecărui cuplu de numere reale (x, y) i se asociază un punct $P \in \pi$, astfel încât x este abscisa lui P, iar y este ordonata lui P. Deci există o funcţie bijectivă f: $\mathbf{C} \to \pi$, care asociază fiecărui număr complex $z = x + iy$, $(x, y \in \mathbf{R})$ un punct unic $P \in \pi$ de coordonate (x, y) faţă de reperul ales, numit imaginea geometrică a numărului complex z. Deci am asociat punctul $P(x, y)$ numărului complex $z = x + iy$ şi vom spune că z este afixul punctului P. Dacă imaginea geometrică a lui z este punctul P, atunci numărul complex z este afixul punctului P şi vom nota cu $P(z)$. Rezultă că afixul punctului O este numărul complex O, afixul punctului A este numărul complex 1, iar afixul punctului B este i. Afixele punctelor de pe axa OA sunt numere reale, iar afixele punctelor de pe axa OB sunt pur imaginare.

Fie z afixul unui punct P din planul π, atunci punctul $P'(\bar{z})$ este simetricul lui $P(z)$ faţă de axa OA, punctul $P''(-\bar{z})$ este simetricul lui $P(z)$ faţă de originea O, iar punctul $P'''(-\bar{z})$ este simetricul lui $P''(-z)$ faţă de OA şi al lui $P(z)$ faţă de OB.

Dacă punctele M_1 şi M_2 au afixele z_1 şi z_2, atunci punctul M care împarte segmentul $[M_1M_2]$ într-un raport k are afixul:

$$z = \frac{z_1 - kz_2}{1 - k}.$$

Fie deci:

$$z_1 = x_1 + iy_i,\ z_2 = x_2 + iy_2 \text{ şi } \frac{MM_1}{MM_2} = k,$$

unde $k < 0$ când M aparţine segmentului $[M_1M_2]$ şi $k > 0$ în caz contrar. Deoarece coordonatele lui M_1 şi M_2 sunt (x_1, y_1), (x_2, y_2), atunci se cunoaşte că M are coordonatele:

$$x = \frac{x_1 - kx_2}{1-k}, \qquad y = \frac{x_2 - ky_2}{1-k}.$$

Astfel afixul punctului M este:

$$z = x + iy = \frac{x_1 - kx_2}{1-k} + i\frac{x_2 - ky_2}{1-k} = \frac{z_1 - kz_2}{1-k}.$$

Dacă M este mijlocul segmentului $[M_1M_2]$, atunci $k = -1$ şi avem că:

$$z = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

Dacă punctele M_1, M_2, M_3 au afixele z_1, z_2, z_3 atunci centrul de greutate G al triunghiului $M_1M_2M_3$ are afixul:

$$G_M = \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3}.$$

Notând cu M mijlocul segmentului $[M_1M_2]$, atunci:

$$Z_M = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

Punctul G fiind centrul de greutate al triunghiului $M_1M_2M_3$ rezultă că G împarte segmentul MM_3 în raportul $k = -\frac{1}{2}$ şi deci vom avea:

$$Z_G = \frac{Z_M + \frac{1}{2}z_3}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3}.$$

Dacă $M_k(z_k)$, $k = 1, 2, 3$ sunt trei puncte în planul π, atunci:

$$\sphericalangle M_2OM_1 = \arg\frac{z_2}{z_1} \text{ şi } \sphericalangle M_3M_1M_2 = \arg\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}.$$

În adevăr:

$$\sphericalangle M_2OM_1 = \sphericalangle AOM_2 - \sphericalangle AOM_1 = \arg z_1 - \arg z_2 = \arg\frac{z_1}{z_2}.$$

Se ştie că imaginea diferenţei $z_3 - z_1$ este vârful M al paralelogramului OM_1M_3M iar imaginea diferenţei $z_2 - z_1$ este vârful M' al paralelogramului OM_1M_2M'. Se observă uşor că:

$$\sphericalangle M_3MM_2 = \sphericalangle MOM' \text{ şi deci } \sphericalangle M_3MM_2 = \arg\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}.$$

Fiind date trei puncte $M_k(z_k)$, $k = 1, 2, 3$, punctele M_1, M_2, M_3 sunt coliniare dacă şi numai dacă:

$$\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} \in \mathbf{R}.$$

Dacă punctele sunt coliniare, atunci unghiul $\sphericalangle M_3M_1M_2$ are ca măsură 0 sau π şi numerele complexe care au argumentul 0 sau π sunt reale. Reciproc dacă:

$$\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} \in \boldsymbol{R} \text{ atunci } \arg\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} \in \{O, \pi\}$$

şi rezultă că măsura lui $\sphericalangle M_3M_1M_2$ este 0 sau π, de unde rezultă că punctele M_1, M_2, M_3 sunt coliniare.

Fiind date patru puncte $M_k(z_k)$, $k = 1, 2, 3, 4$, dreptele M_1M_2 şi M_3M_4 sunt perpendiculare dacă şi numai dacă:

$$\frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_4} \in \boldsymbol{C} \setminus \boldsymbol{R}.$$

Faptul că dreptele M_1M_2 şi M_3M_4 sunt perpendiculare este echivalent cu $\frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_4} \in \boldsymbol{C} \setminus \boldsymbol{R}$, este o consecinţă a faptului că unghiul dreptelor M_1M_2 şi M_3M_4 este $\frac{\pi}{2}$ şi numerele complexe de argument $\frac{\pi}{2}$ sunt pur complexe.

Dacă avem două puncte P şi Q de afixe p şi q, atunci:

$$\cos\sphericalangle POQ = \cos\left(\arg\frac{p}{q}\right) = \cos(\arg p - \arg q) = \cos(\arg q - \arg p)$$

şi

$$\sin\sphericalangle POQ = \pm\sin(\arg p - \arg q).$$

Dacă m, p, q sunt afixele a trei puncte distincte M, P, Q din planul π şi fie P' şi Q' punctele de afixe $p - m$ şi $q - m$ atunci avem: $\sphericalangle PMQ = \sphericalangle P'OQ'$ şi rezultă că:

$$\cos\sphericalangle PMQ = \cos\sphericalangle P'OQ' = \cos\left(\arg\frac{p-m}{q-m}\right)$$

şi

$$\sin\sphericalangle PMQ = \pm\sin\left(\arg\frac{p-m}{q-m}\right).$$

Să arătăm că dacă patru puncte distincte M, N, P, Q au afixele m, n, p, q atunci o condiţie necesară şi suficientă ca cele patru puncte să fie coliniare sau conciclice este ca biraportul:

$$K = \frac{m-p}{n-p} : \frac{m-q}{n-q}$$

să fie număr real. Dacă patrulaterul $MPNQ$ este inscriptibil, atunci raportul precedent este un număr real negativ.

Pentru ca $MPNQ$ să fie patrulater inscriptibil este necesar şi suficient ca să avem:

$$\text{măs}\sphericalangle PMQ = \pi - \text{măs}\sphericalangle PNQ$$

sau

$$\cos\sphericalangle PMQ = -\cos\sphericalangle PNQ \text{ şi } \sin\sphericalangle PMQ = \sin\sphericalangle PNQ.$$

Aceste relaţii sunt echivalente cu:

$$\cos\left(\arg\frac{p-m}{q-m}\right) = -\cos\left(\arg\frac{p-n}{q-n}\right)$$

şi

$$-\sin\left(\arg\frac{p-m}{q-m}\right) = \sin\left(\arg\frac{p-n}{q-n}\right).$$

Dacă notăm cu $a = \frac{p-m}{q-m}$ şi $b = \frac{p-n}{q-n}$ atunci condiţiile devin:

$$\cos(\arg a) = -\cos(\arg b) \text{ şi } -\sin(\arg a) = \sin(\arg b).$$

Ultimele formule arată că punctele A şi B, având afixele a şi b sunt situate pe două semidrepte $|OA$ şi $|OB$ situate în prelungire, deci $O \in [AB]$. Aceasta arată că diferenţa arg a – arg b este egală cu π sau cu $-\pi$ şi că $\left|\arg\frac{a}{b}\right| = \pi$ şi deci rezultă că $\frac{a}{b}$ trebuie să fie număr real negativ. Reciproc, dacă raportul $\frac{a}{b}$ este un număr real negativ, atunci relaţiile anterioare sunt adevărate şi punctele M, N, P, Q formează un patrulater inscriptibil.

Dacă punctele M, N, P, Q sunt coliniare atunci este necesar şi suficient ca: măs $\sphericalangle PMN = 0$ şi măs $\sphericalangle QMN = 0$ sau

$$\cos(\sphericalangle PMN) = \cos(\sphericalangle QMN) \text{ şi } \sin(\sphericalangle PMN) = \sin(\sphericalangle QMN)$$

sau

$$\cos\left(\arg\frac{p-m}{p-n}\right) = \cos\left(\arg\frac{q-m}{q-n}\right)$$

şi

$$\sin\left(\arg\frac{p-m}{p-n}\right) = \sin\left(\arg\frac{q-m}{q-n}\right)$$

şi deci condiţiile devin:

$$\cos(\arg a) = \cos(\arg b) \text{ şi } \sin(\arg a) = \sin(\arg b).$$

Ultimele formule arată că punctele A şi B de afixe a şi b sunt situate pe aceeaşi semidreaptă. Aceasta înseamnă că diferenţa arg a – arg $b = 0$ şi rezultă că $\frac{a}{b}$ trebuie să fie un număr real pozitiv. Reciproc, dacă raportul $\frac{a}{b}$ este un număr real pozitiv, atunci relaţiile anterioare sunt verificate şi deci punctele M, N, P, Q sunt coliniare.

5. Aria unui poligon în complex

Dacă $z_1, z_2, \ldots z_n$ sunt afixele vârfurilor unui poligon plan convex, orientat direct, atunci S aria sa este dată de formula:

$$S = \frac{1}{2} Im\left(\sum_{k=1}^{n} z_{k-1}\bar{z}_k\right), \quad (\text{unde } z_{n+1} = z_1).$$

Vom arăta mai întâi că putem alege originea sistemului de coordonate în interiorul poligonului. Dacă z este un număr complex nenul, numerele:

$$z\sum_{k=1}^{n}\bar{z}_k + \bar{z}\sum_{k=1}^{n} z_{k-1} \quad \text{şi} \quad n|z|^2$$

sunt reale şi atunci avem:

$$Im\left(\sum_{k=1}^{n}(z_{k-1}+z)(\bar{z}_k+\bar{z})\right) - Im\left(\sum_{k=1}^{n} z_{k-1}\bar{z}_k\right) + Im\left(z\sum_{k=1}^{n}\bar{z}_k + \bar{z}\sum_{k=1}^{n} z_{k-1}\right) +$$

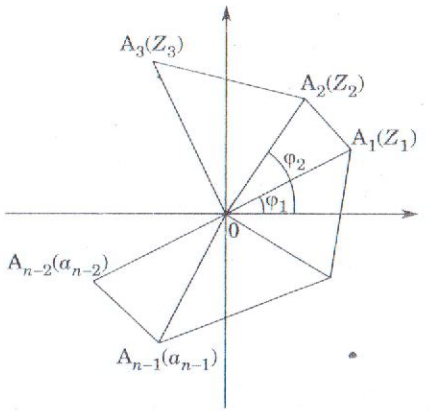
$$+ Im\left(n|z|^2\right) = Im\left(\sum_{k=1}^{n} z_{k-1}\bar{z}_k\right),$$

ceea ce arată că numărul $Im\left(\sum_{k=1}^{n} z_{k-1}\bar{z}_k\right)$ rămâne neschimbat dacă toate vârfurile poligonului convex $A_1A_2\ldots A_n$ sunt supuse aceleeaşi translaţii. Prin urmare, putem considera că originea sistemului de axe se află în interiorul poligonului. Dacă notăm cu $z_k = r_k(\cos\varphi_k + i\sin\varphi_k)$ atunci:

$$Im\left(\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} z_{k-1}\bar{z}_k\right) = \frac{1}{2} Im\left(\sum_{k=1}^{n} r_{k-1}r_k\left[\cos(\varphi_{k-1}-\varphi_k) + i\sin(\varphi_{k-1}-\varphi_k)\right]\right)$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} r_{k-1}r_k\sin(\varphi_{k-1}-\varphi_k).$$

Deoarece aria triunghiului $\sigma[OA_kA_{k+1}]$ este $\frac{1}{2}r_{k-1}r_k\sin(\varphi_{k-1}-\varphi_k)$ iar poligonul este convex, aria acestuia se obţine ca suma ariilor triunghiurilor $\sigma[OA_kA_{k+1}]$, $k = 1, 2, \ldots, n$.



6. Proprietăţi geometrice exprimate în complex

Mijlocul unui segment. Centrul de greutate al unui triunghi

$z = \frac{z_1 + z_2}{2}$ este afixul mijlocului segmentului $|M_1M_2|$, unde z_1 este afixul lui M_1 şi z_2 afixul lui M_2. Dacă z_k este afixul lui M_k, $k = 1, 2, 3$ atunci:

$$z = \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3}$$

este afixul centrului de greutate al triunghiului $M_1M_2M_3$. Dacă punctul M se află pe $|M_1M_2|$ şi $\frac{MM_1}{MM_2} = k$, atunci afixul lui M este:

$$z = \frac{z_1 - kz_2}{1 - k} \qquad (1).$$

Condiţia ca punctele $M_1(z_1)$, $M_2(z_2)$, $M(z)$ să fie coliniare este:

$$z = k_1z_1 + k_2z_2, \quad k_1 + k_2 = 1, \quad k_1, k_2 \text{ sunt numere reale} \qquad (2).$$

O altă condiţie echivalentă cu (1) sau (2) este:

- punctele $M_1(z_1)$, $M_2(z_2)$, $M_3(z_3)$ sunt coliniare dacă există k_1, k_2, k_3 numere reale astfel ca:

$$k_1z_1 + k_2z_2 + k_3z_3 = 0 \text{ şi } k_1 + k_2 + k_3 = 0 \qquad (3).$$

Dacă punctele $M_1(z_1)$, $M_2(z_2)$, $M_3(z_3)$, $M_4(z_4)$ sunt vârfurile unui paralelogram, mijloacele diagonalelor M_1M_3 şi M_2M_4 coincid, deci:

$$z_1 + z_3 = z_2 + z_4 \qquad (4).$$

Analog, condiţia ca triunghiuile $M_1M_2M_3$ şi $M_1'M_2'M_3'$ să aibă acelaşi centru de greutate este:

$$z_1 + z_2 + z_3 = z_1' + z_2' + z_3' \qquad (5).$$

Folosirea modulului. Modulul unui număr complex $z = x + iy$ de afix M, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ este distanţa OM. Pentru două puncte $M_1(z_1)$ şi $M_2(z_2)$ distanţa M_1M_2 este modulul diferenţei afixelor lor $M_1M_2 = |z_1 - z_2|$. Într-adevăr:

$$|z_1 - z_2| = |(x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Ecuaţia unui cerc de centru $M_0(z_0)$ şi rază r, utilizând noţiunea de modul se scrie:

$$|Z - Z_0| = r.$$

Folosirea argumentului. Dacă $M_1(z_1)$, $M_2(z_2)$ sunt două puncte în planul xOy atunci:

$$\sphericalangle M_2OM_1 = \arg\frac{z_2}{z_1} \qquad (6).$$

În adevăr:

$$\sphericalangle M_2OM_1 = \sphericalangle(OM_2, Ox) - \sphericalangle(OM_1, Ox) = \arg z_2 - \arg z_1 = \arg\frac{z_2}{z_1}.$$

Dacă $M_1(z_1)$, $M_2(z_2)$, $M_3(z_3)$ sunt trei puncte în planul xOy atunci:

$$\sphericalangle M_3M_1M_2 = \arg\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} \qquad (7).$$

este tot formaula (6), în care am translatat originea în punctul M_1. Dacă punctele $M_1(z_1)$, $M_2(z_2)$, $M_3(z_3)$ sunt coliniare atunci:

$$\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} = \text{real}.$$

În adevăr, prin ipoteză, unghiul $M_3M_1M_2$ este 0 sau 180° şi numerele cu argument 0 sau 180° sunt reale.

Fie punctul M situat în segmentul M_1M_2, fie $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, $M(x, y)$ şi $\frac{MM_1}{MM_2} = k$ = număr real, rezultă dacă se ţine seama de orientarea segmentelor:

$$x = \frac{x_1 - kx_2}{1 - k}, \quad y = \frac{y_1 - ky_2}{1 - k} \qquad (1).$$

Din (1) obţinem:

$$x + iy = \frac{x_1 + iy_1 - k(x_2 + iy_2)}{1 - k} \qquad (2).$$

Dacă z_1, z_2 sunt afixele punctelor M_1, M_2, M atunci din (2) rezultă:

$$z = \frac{z_1 - kz_2}{1 - k} \qquad (3).$$

Relaţiile (1), (2), (3) sunt echivalente; totodată relaţia (3) exprimă condiţia ca punctele M_1, M_2, M să fie coliniare.

Propoziţie. Dacă a, b, c sunt afixele punctelor A, B, C atunci punctele sunt coliniare dacă şi numai dacă există trei numere reale nenule k_1, k_2, k_3 astfel încât:

$$k_1a + k_2b + k_3c = 0 \text{ şi } k_1 + k_2 + k_3 = 0 \qquad (4).$$

Demonstraţie. Condiţia este necesară: fie A, B, C coliniare atunci:

$$\frac{BA}{BC} = k = \text{număr real}.$$

Rezultă conform cu relaţia (3) $b = \frac{a - kc}{1 - k}$ sau eliminând numitorul rezultă:

$$b(1 - k) = a - kc \text{ sau } a - (1 - k)b - kc = 0,$$

putem lua:

$$k_1 = 1, k_2 = -(1 - k), k_3 = -k$$

şi aceste numere verifică relaţia (4).

Condiţia este suficientă: presupunem că se verifică relaţia (4), rezultă:

$$k_3 = -(k_1 + k_2)$$

şi apoi:

$$k_1a + k_2b - (k_1 + k_2)c = 0$$

de unde rezultă:

$$k_1(a - c) = -k_2(b - c)$$

de unde rezultă:

$$\frac{a-c}{b-c} = -k_2 / k_1 = \text{număr real} - k.$$

Deci $\frac{a-c}{b-c} = k$ rezultă de aici $c = \frac{a - kb}{1-k}$ adică o relaţie de forma (3), deci punctele A, B, C sunt coliniare.

O altă demonstraţie a propoziţiei următoare:

"Dacă a, b, c sunt afixele punctelor A, B, C şi dacă există trei numere reale nenule k_1, k_2, k_3 astfel încât:

$$k_1a + k_2b + k_3c = 0 \quad \text{şi} \quad k_1 + k_2 + k_3 = 0,$$

atunci punctele A, B, C sunt coliniare.

$a = x_1 + iy_1$, $b = x_2 + iy_2$, $c = x_3 + iy_3$ şi din relaţia de condiţie rezultă:

$$k_1x_1 + k_2x_2 + k_3x_3 = 0, \quad k_1y_1 + k_2y_2 + k_3y_3 = 0, \quad k_1 + k_2 + k_3 = 0 \qquad (1).$$

Trebuie ca:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Într–adevăr, dacă înmulţim prima coloană cu k_1, a doua coloană cu k_2 şi a treia coloană cu k_3 şi adunăm după aceea la prima coloană celelalte două coloane, se obţine prima coloană cu elementele egale cu zero din (1) şi atunci determinantul este nul, deci punctele A, B, C sunt coliniare.

7. Triunghiuri asemenea

Considerăm două triunghiuri $A_1A_2A_3$ şi $B_1B_2B_3$ asemenea în această ordine, adică:

$$\frac{A_1A_2}{A_1A_3} = \frac{B_1B_2}{B_1B_3}, \quad \sphericalangle A_2A_1A_3 = \sphericalangle B_2B_1B_3.$$

Dacă triunghiurile sunt la fel orientate, exprimăm aceste două relaţii printr–o singură relaţie în complex:

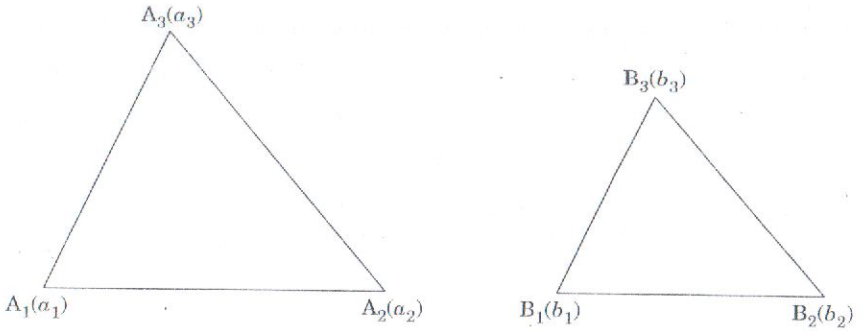
$$\frac{a_2 - a_1}{a_3 - a_1} = \frac{b_2 - b_1}{b_3 - b_1}$$

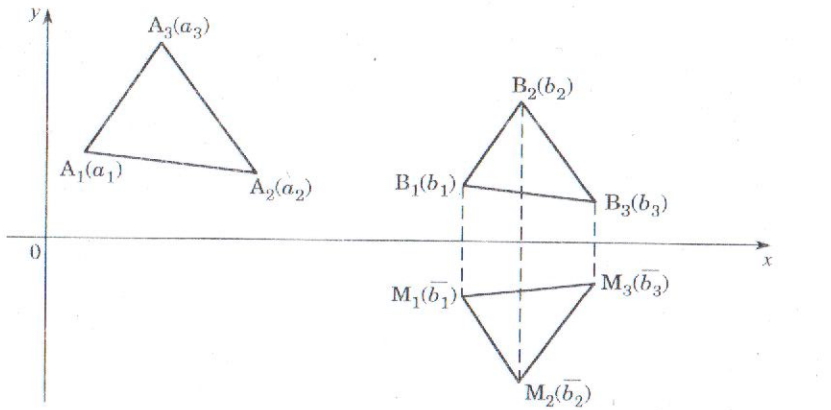
unde a_i, b_i sunt afixele lui A_i, B_i. În adevăr, egalitatea de mai sus este

echivalentă cu două egalităţi între modulele şi argumentele aceloraşi numere complexe, care coincid cu relaţiile precedente în real. Putem să scriem ultima relaţie sub formă simetrică:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Deci două triunghiuri sunt asemenea şi cu aceeaşi orientare au proprietatea că afixele lor verifică ultima relaţie.





Dacă triunghiurile nu au aceeaşi orientare, atunci considerăm triunghiul $M_1M_2M_3$ simetricul triunghiului $B_1B_2B_3$ faţă de axa absciselor. Cum triunghiul $M_1M_2M_3$ are aceeaşi orientare ca şi triunghiul $A_1A_2A_3$ şi cum afixele punctelor M_i sunt $\overline{b_i}$, rezultă că relaţia devine:

$$\frac{a_2 - a_1}{a_3 - a_1} = \frac{\bar{b}_2 - \bar{b}_1}{\bar{b}_3 - \bar{b}_1}$$

care se mai scrie sub formă simetrică sub forma:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ \bar{b}_1 & \bar{b}_2 & \bar{b}_3 \end{vmatrix} = 0$$

În particular, dacă triunghiul $A_1A_2A_3$ este echilateral, atunci $A_2A_3A_1 \sim A_3A_1A_2$ şi rezultă că:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_1 \end{vmatrix} = 0,$$

de unde rezultă condiţia:

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_1.$$

Deci triunghiul $A_1A_2A_3$ este echilateral dacă:

$$(a_1 - a_2)^2 + (a_2 - a_3)^2 + (a_3 - a_1)^2 = 0.$$

8. Geometrie analitică în complex

Formulele care apar în geometria analitică se pot transpune uşor în complex pornind de la formulele $z = x + iy$ şi $z = x - iy$.

Din aceste formule găsim uşor că:

$$x = \frac{z + \bar{z}}{2} \text{ şi } y = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

O ecuaţie $f(x, y) = 0$ devine $\varphi(z, \bar{z}) = 0$.

Ca atare, putem să transpunem în complex orice ecuaţie şi condiţie în coordonate a geometriei analitice pe axe.

Distanţa dintre două puncte $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ dată de expresia:

$$M_1M_2 = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

devine în complex:

$$M_1M_2^2 = (z_2 - z_1)(\bar{z}_2 - \bar{z}_1).$$

Dreapta. Ecuaţia dreptei: $ax + by + c = 0$ devine în complex:

$$a(z + \bar{z}) - bi(z - \bar{z}) + 2c = 0$$

adică o ecuaţie de forma $\alpha z + \bar{\alpha}\bar{z} + a = 0$ cu α complex şi a real. Rezultă pentru coeficienţii ecuaţiei:

$$\alpha = \frac{a - bi}{2}, \quad a = c.$$

♦ ecuaţia dreptei determinate de două puncte afixe z_1, z_2 este:

$$\begin{vmatrix} z_1 & \bar{z}_1 & 1 \\ z_2 & \bar{z}_2 & 1 \\ z & \bar{z} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

♦ condiţia de coliniaritate a trei puncte de afixe z_1, z_2, z_3 este:

$$\begin{vmatrix} z_1 & \bar{z}_1 & 1 \\ z_2 & \bar{z}_2 & 1 \\ z_3 & \bar{z}_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (1)$$

♦ aria triunghiului determinat de trei puncte de afixe z_1, z_2, z_3 este:

$$\boldsymbol{A} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{8i}\begin{vmatrix} z_1 + \bar{z}_1 & z_1 - \bar{z}_1 & 1 \\ z_2 + \bar{z}_2 & z_2 - \bar{z}_2 & 1 \\ z_3 + \bar{z}_3 & z_2 - \bar{z}_2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{i}{4}\begin{vmatrix} z_1 & \bar{z}_1 & 1 \\ z_2 & \bar{z}_2 & 1 \\ z_3 & \bar{z}_3 & 1 \end{vmatrix} \qquad (2)$$

♦ coeficientul unghiular al dreptei $\alpha z + \bar{\alpha}\bar{z} + a = 0$ este:

$$m = \operatorname{tg} u = i\frac{\alpha + \bar{\alpha}}{\alpha - \bar{\alpha}} \text{ deci}$$

$$-\frac{\alpha}{\bar{\alpha}} = \frac{\cos u + i \sin u}{\cos u - i \sin u} = e^{2iu}, \; u = \frac{i}{2}\log\left(-\frac{\alpha}{\bar{\alpha}}\right).$$

♦ unghiul a două drepte $\alpha z + \alpha\bar{z} + a = 0, \beta z + \bar{\beta}\bar{z} + b = 0$ este dat de:

$$u_1 - u_2 = \frac{i}{2}\log\left(-\frac{\alpha}{\bar{\alpha}}\right) - \frac{i}{2}\log\left(\frac{\beta}{\bar{\beta}}\right) = \frac{1}{2i}\log\left(\frac{\bar{\alpha}\beta}{\alpha\bar{\beta}}\right)$$

În particular, dreptele sunt paralele dacă $\frac{\alpha}{\bar{\alpha}} = \frac{\beta}{\bar{\beta}}$ şi perpendiculare dacă:

$$\frac{\alpha}{\bar{\alpha}} + \frac{\beta}{\bar{\beta}} = 0.$$

♦ ecuaţia perpendicularei duse din z_0 pe dreapta

$\alpha z + \bar{\alpha}\bar{z} + a = 0$ este $(z - z_0) = \bar{\alpha}(\bar{z} - \bar{z}_0)$ (3)

♦ piciorul perpendicularei este:

$$z = \frac{\alpha z_0 - \bar{\alpha}\bar{z}_0 - a}{2\alpha}$$

♦ distanța de la punctul z_0 la dreaptă este:

$$d = \left| \frac{\alpha z_0 + \bar{\alpha}\bar{z}_0 + a}{2\sqrt{\alpha\bar{\alpha}}} \right| \tag{4}$$

♦ ecuația dreptei BC unde $B(b)$, $C(c)$ este:

$$\begin{vmatrix} z & \bar{z} & 1 \\ b & \bar{b} & 1 \\ c & \bar{c} & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{sau} \quad (\bar{b} - \bar{c})z + (b - c)\bar{z} + b\bar{c} - \bar{b}c = 0$$

♦ coeficientul unghiular complex al dreptei BC este:

$$\frac{b - c}{\bar{b} - \bar{c}}$$

iar al dreptei perpendiculare pe ea este:

$$-\frac{b - c}{\bar{b} - \bar{c}}.$$

În adevăr dacă $B(x_1, y_1)$, $C(x_2, y_2)$ atunci:

$$b - c = x_1 + iy_1 - x_2 - iy_2 = x_1 - x_2 + i(y_1 - y_2) = |b - c|\left(\frac{x_1 - x_2}{|b - c|} + i\frac{y_1 - y_2}{|b - c|}\right)$$

$$b - c = |b - c|(\cos u + i \sin u)$$

unde $u = \sphericalangle(BC, Ox)$. Rezultă că: $\dfrac{b - c}{\bar{b} - \bar{c}} = e^{2iu}$ și dreapta perpendiculară pe BC face cu axa Ox unghiul: $w = u + 90°$, rezultă că coeficientul unghiular complex al perpendicularei pe BC este:

$$e^{2iw} = e^{2i(u + 90°)} = e^{2iu}e^{i180} = -e^{2iu} = -\frac{b - c}{\bar{b} - \bar{c}}$$

ceea ce trebuia demonstrat.

♦ ecuația perpendicularei din z_0 pe BC este:

$$z - z_0 = -\frac{b - c}{\bar{b} - \bar{c}}(\bar{z} - \bar{z}_0) \tag{5}$$

Cercul. Ecuația cercului:

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

devine:

$$z\bar{z} + \alpha z + \bar{\alpha}\bar{z} + a = 0$$

a fiind real; rezultă:

$$2\alpha = a - ib,\ a = c,\ r^2 = \alpha\bar{\alpha} - a \quad \text{sau} \quad (z - \mu)(\bar{z} - \bar{\mu}) = r^2$$

unde μ este centrul iar r raza. Puterea punctului z_0 față de cercul de mai sus este:

$$p = z_0\bar{z}_0 + \alpha z_0 + \bar{\alpha}\bar{z}_0 + c\,.$$

♦ ecuația axei radicale a două cercuri:

$$z\bar{z} + \alpha z + \bar{\alpha}\bar{z} + a = 0 \text{ și } z\bar{z} + \beta z + \bar{\beta}\bar{z} + b = 0$$

este:

$$(\alpha - \beta)z + (\bar{\alpha} - \bar{\beta})\bar{z} + a - b = 0\,.$$

9. Transformări geometrice

Fie $T: \pi \to \pi$ o transformare a planului. Unui număr complex z îi corespunde transformatul său $T(z) = z'$.

Translația. În complex, translația este determinată de formula $T(z) = z + p$. Dacă considerăm $Z = x + iy$ și $p = a + ib$ atunci obținem:

$$x' = x + a \text{ și } y' = y + b$$

unde

$$z' = x' + iy'.$$

Rotația. Fie a un număr complex de modul unitar, $|a| = 1$. Rotația R de centru O și unghi $\arg a$ este definită prin $T(z) = az$. În general, o rotație având centrul în punctul C de afix c este definită prin $T(z) = c + a(z - c)$.

Omotetia. O omotetie de centrul c și raport h se va defini prin:

$$T(z) = c + h(z - c).$$

O transformare liniară $T(z) = az + b$ cu $a, b \in \mathbb{C}$ reprezintă un produs de translații, rotații și omotetii. Aceste transformări formează un grup cu patru parametri reali.

Inversiunea. O inversiune de pol O și modul k transformă un punct M într-un punct M' situat pe dreapta OM astfel ca $OM \cdot OM' = k$.

Deci într-o inversiune care transformă punctul $M(z)$ în $M'(z')$ argumentul rămâne neschimbat θ, iar modulele satisfac relația $rr' = k$.

Deci:

$$z' = r'e^{i\theta} = \frac{k}{r}e^{i\theta} = \frac{k}{re^{-i\theta}} \quad \text{sau} \quad z' = \frac{k}{\bar{z}},\ k = \text{real}$$

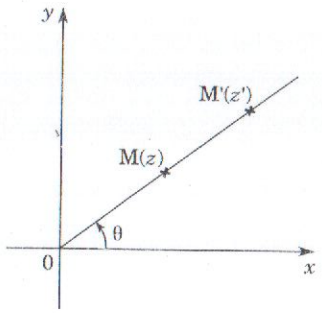
Deci:

$$T(z) = \frac{k}{\bar{z}}, \quad k \in \mathbf{R}.$$

Avem pentru două perechi de puncte inverse,

$$z_2' - z_1' = k\left(\frac{1}{\bar{z}_2} - \frac{1}{\bar{z}_1}\right) = k\frac{\bar{z}_1 - \bar{z}_2}{\bar{z}_1\bar{z}_2},$$

$$(z_2' - z_1')(\bar{z}_2' - \bar{z}_1') = k^2 \frac{(z_1 - z_2)(\bar{z}_1 - \bar{z}_2)}{z_1\bar{z}_1 z_2\bar{z}_2}.$$



Dar $(z_1 - z_2)(\bar{z}_1 - \bar{z}_2) = M_1M_2^2$ deci într–o inversiune:

$$M_1'M_2' = k\frac{M_1M_2}{OM_1OM_2}.$$

Parametrul k fiind real, putem să–l luăm ca unitate de lungime, scriind formula transformării prin inversiune, mai simplu:

$$z' = \frac{1}{\bar{z}}.$$

Considerăm cercurile $az\bar{z} + \alpha z + \bar{\alpha}\bar{z} + b = 0$ a, b reale. Prin efectul unei inversiuni, substituind pe z cu $\frac{1}{\bar{z}}$ obţinem:

$$bz\bar{z} + \alpha z + \bar{\alpha}\bar{z} + a = 0$$

deci tot un cerc. Inversiunea conservă cercurile. Dacă $a = 0$, adică cercul iniţial devine o dreaptă, obţinem un cerc transformat care trece prin origine şi reciproc; dacă $a = b = 0$ obţinem o dreaptă care trece prin origine, invariată în inversiune.

Capitolul II

APLICAŢII DEMONSTRATE DIRECT

1. Numerele complexe distincte z_1, z_2, z_3 sunt afixele vârfurilor unui triunghi echilateral dacă şi numai dacă verifică o relaţie de forma:

$$z_1 + z_2\varepsilon + \varepsilon^2 z_3 = 0,$$

unde ε este o rădăcină complexă de ordinul 3 a unităţii, diferită de 1.

Soluţie. Fie z_1, z_2, z_3 afixele unui triunghi echilateral şi z_0 afixul centrului circumscris. Numerele $z_1 - z_0$, $z_2 - z_0$, $z_3 - z_0$ au proprietatea că:

$$z_2 - z_0 = \varepsilon(z_1 - z_0), \quad z_3 - z_0 = \varepsilon^2(z_1 - z_0)$$

cu ε rădăcină complexă de ordiul 3 a unităţii diferită de 1 convenabil aleasă, fiindcă vârfurile de afixe z_2 şi z_3 sunt imaginile punctului de afix z_1 prin rotaţii de $\frac{2\pi}{3}$ şi $\frac{4\pi}{3}$ radiani în jurul centrului circumscris. Folosind egalităţile de mai sus şi $1 + \varepsilon + \varepsilon^2 = 0$, $\varepsilon^4 = \varepsilon$, avem:

$$z_1 + \varepsilon z_2 + \varepsilon^2 z_3 = z_1 + \varepsilon z_2 + \varepsilon^2 z_3 - (1 + \varepsilon + \varepsilon^2)z_0 = z_1 - z_0 + \varepsilon(z_2 - z_0) +$$
$$+ \varepsilon^2(z_3 - z_0) = z_1 - z_0 + \varepsilon \cdot \varepsilon(z_1 - z_0) + \varepsilon^2 \cdot \varepsilon^2(z_1 - z_0) =$$
$$= (z_1 - z_0)(1 + \varepsilon + \varepsilon^2) = 0.$$

Reciproc, dacă $z_1 + \varepsilon z_2 + \varepsilon^2 z_3 = 0$ şi $z_1 \neq z_2 \neq z_3$ ţinând cont că:

$$z_1 + \varepsilon z_1 + \varepsilon^2 z_1 = 0,$$

obţinem prin scădere:

$$(z_2 - z_1) + \varepsilon^2(z_3 - z_1) = 0 \text{ sau } (z_2 - z_1) = -\varepsilon^2(z_3 - z_1).$$

Aplicând modulul, obţinem $|z_2 - z_1| = |z_3 - z_1|$. În mod analog deducem $|z_3 - z_1| = |z_2 - z_1|$ şi rezultă că triunghiul este echilateral.

2. Se dau triunghiurile echilaterale OAB, OCD, OEF şi M, N, P mijloacele segmentelor $|BC|$, $|DE|$, $|FA|$. Să se arate că triunghiul MNP este echilateral.

Soluţie. Alegem originea axelor în O, notăm cu litere mici corespunzătoare afixele punctelor.

Avem:

$$a + b\varepsilon = 0,\ c + d\varepsilon = 0,\ e + f\varepsilon = 0,\ m = \frac{b + c}{2},\ n = \frac{d + e}{2},$$

$$p = \frac{f+a}{2};\ m + n\varepsilon + p\varepsilon^2 = 0;$$

în adevăr:

$$\frac{b+c}{2} + \left(\frac{d+e}{2}\right)\varepsilon + \left(\frac{f+a}{2}\right)\varepsilon^2 = 0.$$

Deci triunghiul MNP este echilateral.

3. Dacă $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ sunt afixele vârfurilor unui poligon regulat, atunci:

$$a_1 + a_2\varepsilon + a_3\varepsilon^2 + \ldots + a_n\varepsilon^{n-1} = 0 \qquad (1)$$

unde ε este o rădăcină primitivă a ecuației $X^n - 1 = 0$.

Considerăm poligonul regulat cu n laturi care este înscris în cercul de rază egală cu unitatea. Afixele vârfurilor sale sunt $\varepsilon_k = \varepsilon^{k-1}$, $k = \overline{1,n}$, unde ε este o rădăcină complexă a unității.

Din relațiile lui Viete rezultă:

$$\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k = 0\ ,\quad \sum_{i \neq j} \varepsilon_i \varepsilon_j = 0 \qquad (2).$$

Rezultă:

$$\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \ldots + \varepsilon_n^2 = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_n)^2 - 2\left(\sum_{i \neq j} \varepsilon_i \varepsilon_j\right) = 0.$$

Dar cele două poligoane sunt asemenea; rezultă că $a_k = a\varepsilon_k + b$, $a, b \in \mathbf{C}$, și ținând seamă de relațiile de mai sus, coeficienții lui a și b sunt nuli.

4. Să se demonstreze că produsul a două numere de forma $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$, este de aceeași formă unde a, b, c sunt numere reale.

Deci:

$$(a^3 + b^3 + c^3 - 3abc)(a'^3 + b'^3 + c'^3 - 3a'b'c') = A^3 + B^3 + C^3 - 3ABC.$$

De asemenea:

$$(a+b+c)(a'+b'+c') = A + B + C.$$

(Ion Tomescu)

Soluție și generalizare de *Dan Voiculescu*:

Fie $\varepsilon_k = \cos\frac{2k\pi}{3} + i\sin\frac{2k\pi}{3}$ se verifică ușor identitatea:

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = \prod_{k=1}^{3} (a + \varepsilon_k b + \varepsilon_k^2 c)$$

Considerăm deci produsul a două asemenea expresii:

$$(a^3 + b^3 + c^3 - 3abc)(a'^3 + b'^3 + c'^3 - 3a'b'c') =$$
$$= \prod_{k=1}^{3} (a + \varepsilon_k b + \varepsilon_k^2 c)(a' + \varepsilon_k b' + \varepsilon_k^2 c').$$

Efectuând înmulțirea:

$$(a + \varepsilon_k b + \varepsilon_k^2 c)(a' + \varepsilon_k b' + \varepsilon_k^2 c')$$

se obține un polinom de grad 4 în ε_k. Folosind faptul că $\varepsilon_k^3 = 1$, se obține un polinom de grad 2 în ε_k astfel încât:

$$(a + \varepsilon_k b + \varepsilon_k^2 c)(a' + \varepsilon_k b' + \varepsilon_k^2 c') = A + \varepsilon_k B + \varepsilon_k^2 C\ ,\quad k = 1, 2, 3.$$

Dacă a, b, c sunt numere reale întregi, atunci și A, B, C sunt reale și întregi.

$$\prod_{k=1}^{3} (a + \varepsilon_k b + \varepsilon_k^2 c) \prod_{k=1}^{3} (a' + \varepsilon_k b' + \varepsilon_k^2 c') = \prod_{k=1}^{3} (A + \varepsilon_k B + \varepsilon_k^2 C) =$$
$$A^3 + B^3 + C^3 - 3ABC \quad \text{adică c.c.t.d.}$$

A doua parte a problemei rezultă imediat din faptul că:

$$A + B + C = A + \varepsilon_3 B + \varepsilon_3^2 C = (a + \varepsilon_3 b + \varepsilon_3^2 c)(a' + \varepsilon_3 b' + \varepsilon_3^2 c') =$$
$$= (a + b + c)(a' + b' + c').$$

Pentru generalizare vom lua:

$$\varepsilon_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}$$

$$P(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{k=1}^{n} (x_1 + \varepsilon_k x_2 + \ldots + \varepsilon_k^{n-1} x_n).$$

Aplicând argumentele de mai sus obținem: Produsul a două numere de forma $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ este un număr de aceeași formă. Pentru $x_1, x_2, \ldots, x_n$ date există atunci $X_1, X_2, \ldots, X_n$ astfel încât:

$$P(x_1, x_2, \ldots, x_n)^m = P(X_1, X_2, \ldots, X_n) \text{ și } \left(\sum_{j=1}^{n} x_j\right)^m = \sum_{j=1}^{n} X_j.$$

Pentru ca această generalizare să fie completă, mai trebuie doar să arătăm că $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ este un polinom în $x_1, x_2, \ldots, x_n$ cu coeficienți reali (faptul că coeficienții sunt întregi rezultă imediat). Acest rezultat se obține cu ajutorul teoremei polinoamelor simetrice: $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ este un polinom simetric în rădăcinile ecuației $x^n - 1 = 0$, deci se exprimă rațional cu ajutorul coeficienților acestei ecuații.

5. În trapezul $ABCD$ având bazele AB și CD, se consideră punctul P pe latura BC și pe latura AD punctul Q astfel încât AP și CQ să fie paralele. Arătați că QB și PD sunt paralele.

(Olimpiada Olandeză, 1971)

Soluție. Notăm afixele punctelor cu litere mici corespunzătoare.

Avem:

$$b - a = k(d - c),\ k = \text{număr real} \qquad (1)$$

$$p - a = k_1(q - c) \qquad (2).$$

Notăm $\frac{QA}{QD} = k_2$ și $\frac{PB}{PC} = k_3$ de unde rezultă:

$$q = \frac{a - k_2 d}{1 - k_2};\ p = \frac{b - k_3 c}{1 - k_3} \qquad (3).$$

Din (2) şi (3) rezultă:

$$\frac{b-k_3c}{1-k_3}-a=k_1\left(\frac{a-k_2d}{1-k_2}-c\right)$$

sau:

$$\frac{b-a-k_3(c-a)}{1-k_3}=k_1\frac{a-c-k_2(d-c)}{1-k_2} \tag{4}.$$

Relaţia (4) devine ţinând seama de (1):

$$\frac{k(d-c)-k_3(c-a)}{1-k_3}=k_1\frac{a-c-k_2(d-c)}{1-k_2}$$

de unde obţinem:

$$\left(\frac{k}{1-k_3}+\frac{k_1k_2}{1-k_2}\right)(d-c)=\left(\frac{k_3}{1-k_3}+\frac{k_1}{1-k_2}\right)(a-c) \tag{5}.$$

Deoarece CD şi CA nu sunt paralele, rezultă din (5) în mod necesar:

$$\frac{k}{1-k_3}+\frac{k_1k_2}{1-k_2}=0;\quad \frac{k_3}{1-k_3}+\frac{k_1}{1-k_2}=0$$

sau

$$\frac{k}{1-k_3}=-\frac{k_1k_2}{1-k_2} \tag{6}$$

$$\frac{k_3}{1-k_3}=-\frac{k_1}{1-k_2} \tag{7}.$$

Împărţind relaţiile (6) şi (7) obţinem:

$$\frac{k}{k_3}=k_2 \text{ deci } k=k_2k_3 \tag{8}.$$

Pentru ca QB şi PD să fie paralele, trebuie ca $b-q=k_4(d-p)$, k_4 = număr real.

$$b-q=b-\frac{a-k_2d}{1-k_2}=\frac{b-a-k_2(b-d)}{1-k_2}=\frac{k_2k_3(d-c)-k_2(b-d)}{1-k_2} \tag{9}$$

$$d-p=d-(b-k_3c);\ (1-k_3)=\frac{d-b-k_3(d-c)}{1-k_3} \tag{10}.$$

Din relaţiile (9) şi (10) rezultă:

$$\frac{b-q}{d-p}=\frac{-k_2(1-k_3)}{1-k_2}=\text{număr real}=k_4$$

6. Pe laturile patrulaterului convex $ABCD$ se construiesc în exterior triunghiurile echilaterale ABM, BCN, CDP, DAQ. Să se arate că patrulaterele $ABCD$ şi $MNPQ$ au acelaşi centru de greutate.

(*Marius Burtea*, G.M.–B nr.6/1984, pag.224)

Soluţie. Notăm afixele punctelor cu litere mici corespunzătoare, avem:

$$m+b\varepsilon+a\varepsilon^2=0,\ n+c\varepsilon+b\varepsilon^2=0,\ p+d\varepsilon+c\varepsilon^2=0,$$

$$q+a\varepsilon+d\varepsilon^2=0$$

deoarece triunghiurile construite sunt echilaterale.

Adunând relaţiile de mai sus rezultă:

$$m+n+p+q+(a+b+c+d)\cdot(\varepsilon+\varepsilon^2)=0;$$

dar $\varepsilon+\varepsilon^2=0-1$; rezultă că: $m+n+p+q=a+b+c+d$ adică afixele centrelor de greutate ale patrulaterelor $MNPQ$ şi $ABCD$ sunt egale, adică patrulaterele au acelaşi centru de greutate.

7. Pe laturile unui triunghi arbitrar ABC, ca baze, sunt construite în exteriorul acestui triunghi, triunghiurile isoscele $A'BC$, $B'CA$, $C'AB$ ale căror unghiuri de la bază sunt egale cu 30°. Să se arate că triunghiul $A'B'C'$ este echilateral.

Soluţie. Fie afixele punctelor a, b, c, a', b', c'. Segmentul BA' se obţine din segmentul CA' printr–o rotaţie de 120°; în planul complex se va scrie:

$$b-a'=(c-a')(\cos 120^\circ+i\sin 120^\circ)=(c-a')e^{i\frac{2\pi}{3}}.$$

Rezultă:

$$a'=\frac{b-ce^{i\frac{2\pi}{3}}}{1-e^{i\frac{2\pi}{3}}};\ \text{analog}\ b'=\frac{c-ae^{i\frac{2\pi}{3}}}{1-e^{i\frac{2\pi}{3}}},\ c'=\frac{a-be^{i\frac{2\pi}{3}}}{1-e^{i\frac{2\pi}{3}}}.$$

Pentru ca triunghiul $A'B'C'$ să fie echilateral este suficient ca:

$$a'+b'e^{i\frac{2\pi}{3}}+c'e^{i\frac{4\pi}{3}}=0;$$

într–adevăr,

$$\frac{b-ce^{i\frac{2\pi}{3}}+(c-ae^{i\frac{2\pi}{3}})e^{i\frac{2\pi}{3}}+(a-be^{i\frac{2\pi}{3}})e^{i\frac{4\pi}{3}}}{1-e^{i\frac{2\pi}{3}}}=0.$$

8. Fie $a_1, a_2, \ldots, a_n$ lungimile laturilor consecutive ale unui poligon convex cu n laturi. Să se demonstreze că dacă toate unghiurile poligonului sunt congruente şi dacă $a_1\geq a_2\geq\ldots\geq a_n$ atunci $a_1=a_2=\ldots=a_n$.

(*Propusă la a V–a O.I.M*)

Soluţie de *Marian Dincă*. Se ştie că:

$$\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_2A_3}+\ldots+\overrightarrow{A_nA_1}=\overrightarrow{0} \tag{1}.$$

Alegem ca axă reală dreapta A_1A_2, atunci dreptele A_2A_3, $A_3A_4,\ldots$, $A_kA_{k+1},\ldots$, A_nA_1 fac cu acestă axă respectiv unghiuri de măsură:

$$\pi-\frac{(n-a)\pi}{n}=\frac{2\pi}{n};\frac{4\pi}{n};\ldots;\frac{(k-1)2\pi}{n};\ldots;\frac{(n-1)2\pi}{n} \tag{2}.$$

Am ţinut seama că poligonul este convex şi deci suma măsurilor unghiurilor sale este $(n-2)\pi$; cum toate unghiurile sunt congruente rezultă că măsura

unui unghi este $\frac{(n-2)\pi}{n}$. Am ţinut seama, de asemenea, de măsura unghiurilor exterioare unui poligon convex. Relaţia (1) în planul complex se va scrie astfel:

$$a_1 + a_2\left(\cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}\right) + \ldots + a_k\left(\cos\frac{(k-1)2\pi}{n} + i\sin\frac{(k-1)2\pi}{n}\right) + \ldots + a_n\left(\cos\frac{(n-1)2\pi}{n} + i\sin\frac{(n-1)2\pi}{n}\right) = 0 \quad (3).$$

În continuare ne folosim de următoarea lemă:

"Dacă ecuaţia cu coeficienţi reali:

$$a_1 + a_2x + \ldots + a_kx^{k-1} + \ldots + a_nx^{n-1} = 0 \quad (4)$$

unde $a_1 \geq a_2 \geq \ldots a_k \geq \ldots \geq a_n > 0$ admite două rădăcini al căror produs este 1, atunci $a_1 = a_2 = \ldots = a_k = \ldots = a_n$".

Relaţia (3) arată că ecuaţia (4) admite rădăcina

$$\cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n};$$

atunci va admite şi conjugata ei:

$$\cos\frac{2\pi}{n} - i\sin\frac{2\pi}{n}.$$

Produsul acestor rădăcini este 1, iar coeficienţii ecuaţiei satisfac condiţia din lemă, rezultă:

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_k = \ldots = a_n.$$

Demonstrăm lema prin inducţie: pentru $n = 3$, ecuaţia

$$a_1 + a_2x + a_3x^2 = 0 \quad (5)$$

admite două rădăcini x_1 şi x_2 al căror produs $x_1x_2 = 1$, dar $x_1x_2 = a_1/a_3$ deci $a_1 = a_3$ şi cum $a_1 \geq a_2 \geq a_3$ rezultă $a_1 = a_2 = a_3$ deci pentru $n = 3$ se verifică. Presupunem că se verifică lema pentru $n - 1$, deci avem:

"Dacă ecuaţia cu coeficienţi reali:

$$b_1 + b_2x + \ldots + b_kx^{k-1} + \ldots + b_{n-1}x^{n-2} = 0 \quad (6)$$

unde $b_1 \geq b_2 \geq \ldots \geq b_k \geq \ldots \geq b_{n-1} > 0$ admite două rădăcini al căror produs este 1, atunci $b_1 = b_2 = \ldots = b_k = \ldots = b_{n-1}$".

Dacă ecuaţia:

$$a_1 + a_2x + \ldots + a_kx^{k-1} + \ldots + a_nx^{n-1} = 0$$

admite două rădăcini al căror produs este 1, atunci şi ecuaţia

$$a_n + a_{n-1}x + \ldots + a_{n-k}x^k + \ldots + a_1x^{n-1} = 0$$

admite rădăcini al căror produs este 1; rezultă că ecuaţia:

$$a_1(a_1 + a_2x + \ldots + a_nx^{n-1}) - a_n(a_n + a_{n-1}x + \ldots + a_1x^{n-1}) = 0$$

admite două rădăcini al căror produs este 1, ultima ecuaţie se mai poate scrie:

$$a_1 - a_n^2 + (a_1a_2 - a_na_{n-1})x + \ldots + (a_1a_{n-1} - a_na_2)x^{n-2} = 0 \quad (7).$$

Observăm că, coeficienţii ecuaţiei (7) satisfac condiţia:

$$a_1^2 - a_n^2 \geq a_1a_2 - a_na_{n-1} \geq \ldots \geq a_1a_{n-1} - a_na_2 > 0$$

şi, conform presupunerii făcute, rezultă că:

$$a_1^2 - a_n^2 = a_1a_2 - a_na_{n-1} = \ldots = a_1a_{n-1} - a_na_2 \quad (8)$$

Din (8) rezultă:

$$a_1(a_1 - a_2) + a_n(a_{n-1} - a_n) = 0 \quad (9)$$

şi

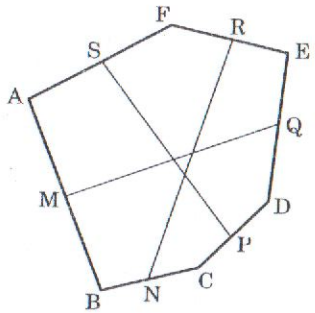
$$a_1(a_1 - a_{n-1}) + a_n(a_2 - a_n) = 0 \quad (10)$$

Din (9) şi (10) rezultă $a_1 = a_2 = a_{n-1} = a_n$, rezultă cu necesitate:

$$a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = a_k = \ldots = a_n.$$

9. Fie un hexagon $ABCDEF$ şi M, N, P, Q, R, S mijloacele laturilor AB, BC, CD, DE, EF, FA. Să se arate că o condiţie necesară şi suficientă pentru ca $RN^2 = MQ^2 + PS^2$ este ca MQ şi PS să fie perpendiculare.

(*Laurenţiu Panaitopol*)



Soluţie. Notăm afixele punctelor cu litere mici, atunci condiţia necesară şi suficientă ca MQ şi PS să fie perpendiculare este:

$$(q - m)(\bar{s} - \bar{p}) + (\bar{q} - \bar{m})(s - p) = 0 \quad (1).$$

Într–adevăr, dacă MQ şi PS sunt perpendiculare, atunci:

$$\arg\left(\frac{q-m}{s-p}\right) = 90^\circ.$$

Deci $\frac{q-m}{s-p} = r'i$, $r' \in R$; conjugând rezultă $\frac{\bar{q}-\bar{m}}{\bar{s}-\bar{p}} = -r'i$, deci:

$$\frac{q-m}{s-p} + \frac{\bar{q}-\bar{m}}{\bar{s}-\bar{p}} = 0;$$

după eliminarea numitorilor se obţine relaţia (1) deci condiţia este necesară.

Să arătăm că este şi suficientă; presupunem că avem relaţia (1). Rezultă din (1):

$$\frac{q-m}{s-p} = -\frac{\bar{q}-\bar{m}}{\bar{s}-\bar{p}} \quad (2).$$

Fie $\frac{q-m}{s-p} = r_1(\cos t + i\sin t)$; atunci din (2) rezultă:

$$r_1(\cos t + i\sin t) = -r_1(\cos t - i\sin t)$$

de unde se obține $2r_1 \cdot \cos t = 0$; dar $r_1 \neq 0$, deci $\cos t = 0$ de unde $t = 90°$, sau $t = 270°$.

Avem relațiile

$$m = \frac{a+b}{2},\ n = \frac{b+c}{2},\ p = \frac{c+d}{2},\ q = \frac{d+e}{2},\ r = \frac{e+f}{2},\ s = \frac{f+a}{2} \quad (3).$$

Din (3) rezultă:

$$m + p + r = n + q + s \quad (4).$$

Din (4) rezultă:

$$n - r = (m - q) + (p - s) \quad (5).$$

Relația $RN^2 = MQ^2 + PS^2$ se scrie în complex astfel:

$$(n-r)(\bar{n}-\bar{r}) = (m-q)(\bar{m}-\bar{q}) + (p-s)(\bar{p}-\bar{s}) \quad (6).$$

Dar

$$(n-r)(\bar{n}-\bar{r}) = [(m-q)+(p-s)]\,[(\bar{m}-\bar{q})+(\bar{p}-\bar{s})] =$$

$$= (m-q)(\bar{m}-\bar{q}) + (p-s)(\bar{p}-\bar{s}) + (m-q)(\bar{p}-\bar{s}) + (\bar{m}-\bar{q})(p-s) \quad (7).$$

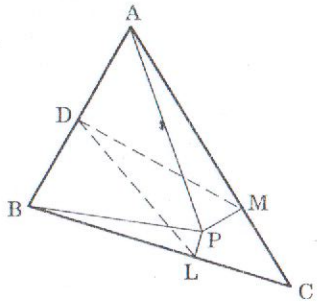
Din (6) și (7) rezultă (1) c.c.t.d.

10. Fie ABC un triunghi și P un punct în interiorul lui astfel ca $\sphericalangle PAC = \sphericalangle PBC$. Fie L, M picioarele perpendicularelor din P pe BC, CA respectiv. Fie D mijlocul lui AB. Să se demonstreze că $DL = DM$.

(*Propusă juriului la a 23-a O.I.M.* de Marea Britanie, 1982)

Soluție. Notăm cu $a, b, c, d, p, l, m,$ afixele punctelor corespunzătoare.

Observăm că $\Delta PAM - \Delta PBL$



Deci: $\frac{BL}{PL} = \frac{AM}{PM} = k$; dar segmentul $|BL|$ se obține din segmentul $|PL|$ printr-o rotație în jurul lui L de 90° și o omotetie de raport k, deci:

$$\frac{1-b}{1-p} = ki \quad (1).$$

segmentul $|PM|$ se obține din segmentul $|AM|$ printr-o rotație de 90° și o omotetie de raport $\frac{1}{k}$, deci între afixe există relația:

$$\frac{m-a}{m-p} = k(-i) \quad (2).$$

Din relațiile (1) și (2) rezultă:

$$l = \frac{b+kip}{1-ki} \text{ și } m = \frac{a+kip}{1+ki} \quad (3)$$

$$DM^2 = \left(m - \frac{a+b}{2}\right)\left(\bar{m} - \frac{\bar{a}+\bar{b}}{2}\right) = \left(\frac{a+kip}{1-ki} - \frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{\bar{a}-ki\bar{p}}{1+ki} - \frac{\bar{a}+\bar{b}}{2}\right) =$$

$$= \frac{a\bar{a}}{1+k^2} + \left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{\bar{a}+\bar{b}}{2}\right) + \frac{kip\bar{a}}{1+k^2} - \frac{ki\bar{p}a}{1+k^2} + \frac{k^2p\bar{p}}{1+k^2} \quad (4)$$

$$DL^2 = \left(l - \frac{a+b}{2}\right)\left(\bar{l} - \frac{\bar{a}+\bar{b}}{2}\right) = \left(\frac{b-kip}{1-ki} - \frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{\bar{b}+ki\bar{p}}{1+ki} - \frac{\bar{a}+\bar{b}}{2}\right) =$$

$$= \frac{b\bar{b}}{1+k^2} + \left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{\bar{a}+\bar{b}}{2}\right) + \left(\frac{ki\bar{b}p}{1+k^2} - \frac{kib\bar{p}}{1+k^2} + \frac{k^2p\bar{p}}{1+k^2}\right) \quad (5).$$

Dacă alegem originea în punctul D, rezultă $d = 0$, deci:

$$\frac{a+b}{2} = 0,\ a = -b$$

și din relațiile (4) și (5) rezultă $DM^2 = DL^2$, deci $DM = DL$.

11. Pe laturile triunghiului ABC se construiesc, cu vârfurile în exterior, triunghiurile ADB, BEC, CFA astfel încât:

$$\frac{AD}{BD} = \frac{BE}{CE} = \frac{CF}{AF} = k \text{ și } \sphericalangle ADB = \sphericalangle BEC = \sphericalangle CFA = \alpha.$$

Să se demonstreze că:

a) Mijloacele M, N, P, Q ale segmentelor $|AC|$, $|DC|$, $|BC|$, $|EF|$ sunt vârfurile unui paralelogram.

b) În acest paralelogram, două unghiuri au măsura α și raportul a două laturi este k..

Soluție. Notăm afixele punctelor cu litere mici corespunzătoare.

Avem relațiile:

$$\frac{d-a}{d-b} = \frac{b-e}{c-e} = \frac{c-f}{a-f} = k \cdot e^{i\alpha} \quad (1).$$

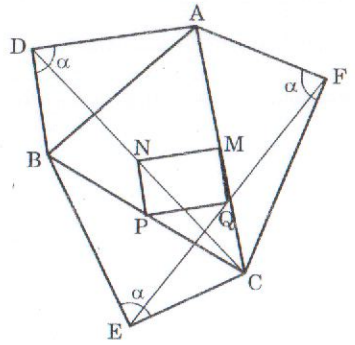
Din (1) rezultă:

$$d = \frac{a - ke^{i\alpha} \cdot b}{1 - ke^{i\alpha}}, \quad e = \frac{b - ke^{i\alpha} \cdot c}{1 - ke^{i\alpha}}, \quad f = \frac{c - ke^{i\alpha} \cdot a}{1 - ke^{i\alpha}} \tag{2}$$

$$m = \frac{a + c}{2}, \quad p = \frac{b + c}{2}, \quad m + p = \frac{a + b + 2c}{2} \tag{3}$$

$$n = \frac{c + d}{2} = \frac{c + a - ke^{i\alpha} \cdot (c + b)}{2(1 - e^{i\alpha} \cdot k)} \tag{4}$$

$$q = \frac{e + f}{2} = \frac{b + c - ke^{i\alpha} \cdot (c + a)}{2(1 - ke^{i\alpha})} \tag{5}.$$



Din relaţiile (3), (4), (5) rezultă: $m + p = n + q$, adică $MNPQ$ este paralelogram şi rezultă a).

Pentru punctul b) calculăm raportul:

$$\frac{q - m}{n - m} = \left(\frac{b + c - ke^{i\alpha} \cdot (c + a)}{2(1 - ke^{i\alpha})} - \frac{a + c}{2}\right) : \left(\frac{c + a - ke^{i\alpha} \cdot (c + b)}{2(1 - ke^{i\alpha})} - \frac{a + c}{2}\right);$$

făcând calculele rezultă:

$$\frac{q - m}{n - m} = -\frac{1}{k} e^{-i\alpha}.$$

Această ultimă relaţie arată că segmentul MQ este obţinut din segmentul MN printr–o rotaţie de unghi α şi raport $\frac{1}{k}$.

12. Pe laturile unui paralelogram $ABCD$ se construiesc în exterior pătratele $AEFB$, $BGHC$, $CIJD$, $DKLA$ de centre O_1, O_2, O_3, O_4. Să se demonstreze că:

a) $O_1O_2O_3O_4$ este un pătrat;

b) Dacă $N = DH \cap BI$ şi $M = BL \cap DE$ atunci $BNDM$ este un dreptunghi.

Soluţie. Fie O punctul de intersecţie al diagonalelor paralelogramului $ABCD$ pe care îl alegem ca origine. Dacă a şi b sunt afixele lui A şi B, atunci $-a$ şi $-b$ sunt afixele punctelor C şi D. Pentru celelalte puncte din problemă vom nota afixele chiar cu punctul pe care îl reprezintă. Să exprimăm afixele punctelor O_1, O_2, O_3 şi O_4. Se observă că AO_1 se obţine din BO_1 printr–o rotaţie de 90° deci $a - o_1 = (b - o_1)i$; rezultă:

$$o_1 = \frac{a - bi}{1 - i} = \frac{(1 + i)a + (1 - i)b}{2} \tag{1}.$$

Analog:

$$o_2 = \frac{(1 + i)b + (1 - i)c}{2} = \frac{(1 + i)b - (1 - i)a}{2} \tag{2}$$

$$o_3 = \frac{(1 + i)c + (1 - i)d}{2} = \frac{(1 + i)(-a) + (1 - i)(-b)}{2} \tag{3}$$

$$o_4 = \frac{(1 + i)d + (1 - i)a}{2} = \frac{(1 + i)(-b) + (1 - i)a}{2} \tag{4}.$$

Se observă că: $o_1 + o_3 = o_2 + o_4 = 0$, de unde deducem că $O_1O_2O_3O_4$ este paralelogram cu centrul în O. Se observă că:

$$\frac{o_3 - o_2}{o_1 - o_2} = \frac{-2ai - 2b}{2a - 2bi} = -i,$$

de unde deducem că $\sphericalangle O_1O_2O_3 = 90°$ deci paralelogramul $O_1O_2O_3O_4$ este dreptunghi. De asemenea, se deduce că $O_1O_2 = O_3O_2$, adică $O_1O_2O_3O_4$ este pătrat.

Pentru punctul b) se observă uşor că $DN \parallel BM$ şi $DM \parallel NB$. Rămâne de arătat că paralelogramul $BNDM$ este dreptunghi.

Avem segmentul $|AL|$ ce se obţine din segmentul $|DA|$ printr–o rotaţie de 90°; aceasta în planul complex se scrie $l - a = (d - a)i$ sau $l - a = (-b - a)i$ deci $l = (l - i)a - bi$ analog; segmentul $|IC|$ se obţine din segmentul $|DC|$ printr–o rotaţie negativă de 90°. Deducem:

$$i - c = (d - c)(-i) \text{ deci } i = (1 + i)(-a) + bi,$$

$$\frac{l - b}{i - b} = \frac{(1 - i)a - bi - b}{(1 + i)(-a) + bi - b} = i,$$

deci:

$$\arg \frac{l - b}{i - b} = 90° \text{ adică } LB \perp IB,$$

deci $MB \perp NB$ rezultă că $BNDM$ este dreptunghi.

13. Se consideră, pe diagonalele AC, CE ale unui hexagon regulat $ABCDEF$, punctele interioare M respectiv N, astfel ca $AM/AC = CN/CE = r$. Să se determine r astfel încât B, M, N să fie coliniare.

(Propusă de Olanda la cea de a 23–a O.I.M.)

Soluţie. Alegem originea în centrul cercului circumscris hexagonului şi axa reală trecând prin A. Considerăm raza cercului egală cu unitatea; atunci afixele punctelor A, B, C, E vor fi:

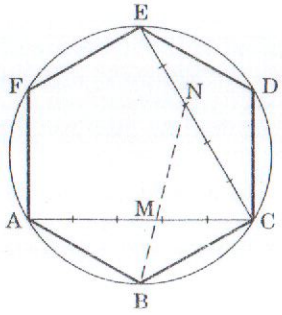
$$1, \quad e^{\frac{i\pi}{3}}, \quad e^{\frac{i2\pi}{3}}, \quad e^{\frac{i4\pi}{3}}.$$

Fie afixele punctelor M şi N notate cu m şi n. Deoarece $AM/AC = r$, rezultă în planul complex:

$$m - 1 = \left(e^{i\frac{2\pi}{3}} - 1\right)r; \quad m = 1 - r + re^{i\frac{2\pi}{3}}$$

de asemenea $CN/CE = r$ implică:

$$n - e^{i\frac{2\pi}{3}} = \left(e^{i\frac{4\pi}{3}} - e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)r;\ n = \left(1 - r + re^{i\frac{2\pi}{3}}\right)e^{i\frac{2\pi}{3}}.$$



Pentru ca punctele B, M, N să fie coliniare, trebuie ca raportul $\frac{n-m}{m-b}$ = real, unde prin b, m, n am notat afixele lor corespunzătoare.

Deci:

$$(1 - r + re^{i\frac{2\pi}{3}})(e^{i\frac{2\pi}{3}} - 1) : (1 - r + re^{i\frac{2\pi}{3}} - e^{i\frac{2\pi}{3}}) = \text{real},$$

sau

$$\frac{(1 - r + re^{i\frac{2\pi}{3}})(e^{i\frac{2\pi}{3}} - 1)}{1 - e^{i\frac{\pi}{3}} - r(1 - e^{i\frac{\pi}{3}})(1 + e^{i\frac{\pi}{3}})} = \frac{(1 - r + re^{i\frac{2\pi}{3}})(e^{i\frac{\pi}{3}} + 1)}{-1 + r(1 + e^{i\frac{\pi}{3}})}$$

sau, după împărţire cu $(e^{i\frac{\pi}{3}} + 1)$, obţinem:

$$\frac{1 - r + r(-1)/2 + i\sqrt{3}/2)}{r - 1/2 + ir\sqrt{3}/6} = \text{real};$$

amplificând cu conjugatul numitorului, obţinem condiţia:

$$(1 - 3r/2 + ir\sqrt{3}/2)(r - i/2 + (-1)\sqrt{3}/6) = \text{real}.$$

În acest produs egalăm cu zero coeficientul lui i şi obţinem:

$$(r - 1/2)\sqrt{3}/2 - (1 - 3r/2)\sqrt{3}/6 = 0$$

de unde rezultă $r = 5/9$.

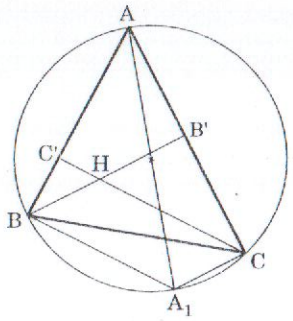
14. Fie $A_1A_2A_3A_4$ un patrulater inscriptibil. Se notează prin H_1, H_2, H_3, H_4 ortocentrele triunghiurilor $A_2A_3A_4$, $A_3A_4A_1$, $A_4A_1A_2$, şi respectiv $A_1A_2A_3$. Să se demonstreze că patrulaterele $A_1A_2A_3A_4$ şi $H_1H_2H_3H_4$ sunt congruente.

Soluţie. Alegem originea axelor în centrul O al cercului circumscris triunghiului ABC. Fie a, b, c afixele punctelor A, B, C, atunci ortocentrul H al triunghiului ABC are afixul $h = a + b + c$; în adevăr, fie A_1 simetricul lui A faţă de O şi B', C' picioarele înălţimilor din B şi C. Cum $BB' \perp AC$ şi $A_1C \perp AC$ rezultă că $BB' \parallel A_1C$. De asemenea, $CC' \perp AB$ şi $A_1B \perp AB$; rezultă că CC'

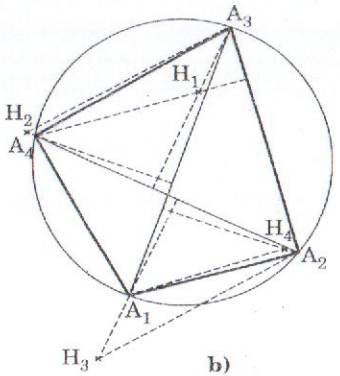
$\parallel A_1B$ deci $BHCA_1$ este paralelogram. Cum afixul lui A_1 este $-a$, deducem că:

$$\frac{h-a}{2} = \frac{b+c}{2}$$

de unde rezultă $h = a + b + c$.



a)



b)

Notând cu a_i afixul lui A_i şi cu h_i afixul lui H_i, $i = 1, 2, 3, 4$ obţinem:

$$h_1 = a_2 + a_3 + a_4,\quad h_2 = a_1 + a_3 + a_4,\quad h_3 = a_1 + a_2 + a_4,\quad h_4 = a_1 + a_2 + a_3.$$

Rezultă $h_i - h_j = a_i - a_j$ deci $H_iH_j = A_iA_j$ şi apoi $\Delta H_iH_jH_k = \Delta A_iA_jA_k$; rezultă $\sphericalangle H_i = \sphericalangle A_i$, $i = 1, 2, 3, 4$ adică patrulaterele sunt congruente.

15. Pe laturile AB şi AC ale unui triunghi se construiesc în afară triunghiurile echilaterale ABN şi ACM. Dacă P, Q, R sunt respectiv mijloacele segmentelor BC, AM, AN, să se demonstreze că triunghiul PQR este echilateral.

(C.Ottescu – Concursul de matematică, etapa pe şcoală, 1981)

Soluţie. Notăm afixele cu litere mici corespunzătoare, alegem originea axelor în A. Triunghiul ABN este echilateral, deci $n + b\varepsilon + 0\ \varepsilon^2 = 0$; rezultă $n = -b\varepsilon$. Triunghiul ACM este echilateral, deci

$$m + \varepsilon\ 0 + c\varepsilon^2 = 0, \text{ rezultă } m = -c\varepsilon^2;$$

$$p = \frac{b+c}{2},\quad q = \frac{a+m}{2} = \frac{0 - c\varepsilon^2}{2} = \frac{-c\varepsilon^2}{2},\quad r = \frac{a+n}{2} = \frac{0 - b\varepsilon}{2} = \frac{-b\varepsilon}{2}$$

Pentru ca triunghiul PQR să fie echilateral, este necesar şi suficient ca:

$$p + q\varepsilon + r\varepsilon^2 = 0 \text{ sau } \frac{b+c}{2} + \left(-\frac{c\varepsilon^2}{2}\right)\varepsilon + \left(-\frac{b\varepsilon}{2}\right)\varepsilon^2 = 0$$

care se verifică imediat deoarece $\varepsilon^3 = 1$.

16. Fie $ABCD$ un pătrat şi M un punct situat în planul pătratului. Notăm $MA = x$, $MB = y$, $MC = z$, $MD = t$. Să se arate că, cu segmentele care au lungimile egale cu produsele xy, yz, zt, tx, se poate forma un patrulater plan.

(Marian Dincă şi I.V.Maftei G.M.–B nr.9/1980, pag.403)

Soluţie. Fie afixele vârfurilor A, B, C, D egale cu 1, ε, ε^2, ε^3 unde ε = rădăcina complexă de ordinul patru a unităţii, deci rădăcina ecuaţiei

$$x^4 - 1 = 0.$$

Avem identitatea următoare:

$$1(z-\varepsilon)(z-\varepsilon^2) + \varepsilon(z-\varepsilon^2)(z-\varepsilon^3) + \varepsilon^2(z-\varepsilon^3)(z-1) +$$

$$+ \varepsilon^3(z-1)(z-\varepsilon) = 0 \qquad (1).$$

Într–adevăr, dezvoltând şi efectuând calculele şi ţinând seama că:

$$\varepsilon^4 = 1,\ \varepsilon^5 = \varepsilon,\ \varepsilon^6 = \varepsilon^2$$

obţinem:

$$(1+\varepsilon+\varepsilon^2+\varepsilon^3)z^2 - (\varepsilon+\varepsilon^2+\varepsilon^3+\varepsilon^4+\varepsilon^5+\varepsilon^2+\varepsilon^4)z + \varepsilon^3+\varepsilon^6+\varepsilon^5+\varepsilon^4.$$

Dar:

$$1+\varepsilon+\varepsilon^2+\varepsilon^3 = 0$$

relaţiile între rădăcini şi coeficienţi ale ecuaţiei $x^4 - 1 = 0$ rezultă identitatea (1).

Trecând câte un termen din identitatea (1) cu semn schimbat în membrul drept şi aplicând proprietatea modulului se obţin patru inegalităţi; de exemplu:

$$(z-\varepsilon)(z-\varepsilon^2) + \varepsilon(z-\varepsilon^2)(z-\varepsilon^3) + \varepsilon^2(z-\varepsilon^3)(z-1) = -\varepsilon^3(z-1)(z-\varepsilon)$$

de unde rezultă:

$$|z-\varepsilon|\,|z-\varepsilon^2| + |\varepsilon|\,|z-\varepsilon^2|\,|z-\varepsilon^3| + |\varepsilon^2|\,|z-\varepsilon^2|\,|z-1| \geq |-\varepsilon^3|\,|z-1|\,|z-\varepsilon|,$$

sau $yz + zt + tx \geq xy$ şi analoagele.

17. Pe laturile BC, CA, AB ale triunghiului ADC se consideră punctele A', B', C' astfel încât:

$$\frac{A'B}{A'C} = \frac{B'C}{B'A} = \frac{C'A}{C'B} = k.$$

Pe laturile $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$ ale triunghiului $A'B'C'$ se consideră punctele A'', B'', C'' astfel încât:

$$\frac{A''C'}{A''B'} = \frac{C''B'}{C''A'} = \frac{B''A'}{B''C'} = k.$$

Să se arate că triunghiurile ABC şi $A''B''C''$ sunt asemenea.

(*C.Caragea*, profesor – Constanţa G.M.– B nr. 2/1981 pag.76)

Soluţie. Notăm afixele punctelor cu litere mici corespunzătoare:

$$a' = \frac{b-kc}{1-k},\quad b' = \frac{c-ka}{1-k},\quad c' = \frac{a-kb}{1-k}$$

$$a'' = \frac{c'-kb'}{1-k} = \frac{\dfrac{a-kb}{1-k} - k\dfrac{c-ka}{1-k}}{1-k} = \frac{(1+k^2)a - k(b+c)}{(1-k)^2} \qquad (1)$$

$$b'' = \frac{a'-kc'}{1-k} = \frac{\dfrac{b-kc}{1-k} - k\dfrac{a-kb}{1-k}}{1-k} = \frac{(1+k^2)b - k(a+c)}{(1-k)^2} \qquad (2)$$

$$c'' = \frac{b'-a'k}{1-k} = \frac{\dfrac{c-ka}{1-k} - k\dfrac{b-kc}{1-k}}{1-k} = \frac{(1+k^2)c - k(b+a)}{(1-k)^2} \qquad (3).$$

Calculăm:

$$\frac{c''-a''}{b''-a''} = \frac{\dfrac{(1+k^2)c-k(b+a)}{(1-k)^2} - \dfrac{(1+k^2)a-k(b+c)}{(1-k)^2}}{\dfrac{(1+k^2)b-k(a+c)}{(1-k^2)} - \dfrac{(1+k^2)a-k(b+c)}{(1-k^2)}} =$$

$$= \frac{(1+k^2)(c-a)-k(a-c)}{(1+k^2)(b-a)-k(a-b)} = \frac{(c-a)(1+k^2+k)}{(b-a)(1+k^2+k)} = \frac{c-a}{b-a}$$

ceea ce arată că $\Delta ABC \sim \Delta A''B''C''$.

18. Fie ABC un triunghi oarecare al cărui ortocentru este H şi fie $k \in [1, \infty)$. Pe semidreptele $(HA$, $(HB$, $(HC$ se consideră punctele A', B', C' astfel încât $HA' = k\,BC$, $HB' = k\,AC$, $HC' = k\,AB$. Să se arate că:

a) $B'C' = 2k\,AM$, $A'C' = 2k\,BN$ şi $A'B' = 2k\,CP$, unde M, N, P sunt mijloacele laturilor BC, AC, respectiv AB.

b) H este centrul de greutate al triunghiului $A'B'C'$.

(*Concursul de matematică etapa judeţeană*, 1982)

Soluţie. Fie afixele punctelor A, B, C, A', B', C', M, N, P, H notate cu a, b, c, a', $b'c'$, m, n, p, h.

Alegem originea în centrul cercului circumscris lui ABC. Atunci

$$h = a + b + c$$

Din relaţia:

$$HA' = k\,BC, \text{ rezultă } a' - (a+b+c) = k(c-b)$$

deci

$$a' = k(c-b) + a + b + c;$$

analog

$$b' = k(a-c) + a + b + c,$$

$$c' = k(b-a) + a + b + c$$

Dar:

$$m = \frac{b+c}{2},\quad n = \frac{a+c}{2},\quad p = \frac{a+b}{2}$$

$$B'C' = c' - b' = k(b-a) + a + b + c - k(a-c) - (a+b+c) =$$

$$= k(b+c-2a) = 2k\left(b - \frac{a+c}{2}\right) = 2k(b-n) = 2k \cdot NB.$$

$$A'B' = b' - a' = k(a-c) + a + b + c - k(c-b) - (a+b+c) =$$

$$k(a+b-2c) = 2k\left(\frac{a+b}{2} - c\right) = 2k(p-c) = 2k\,CP.$$

b) Să arătăm că $h = \dfrac{a'+b'+c'}{3}$ sau:

$$a+b+c = \frac{a'+b'+c'}{3}:$$

$$\frac{a'+b'+c'}{3} = \frac{k(c-b)+a+b+c+k(a-c)+a+b+c+k(b-a)+a+b+c}{3} =$$

$$= \frac{k(c-b+a-c+b-a)+3(a+b+c)}{3} = \frac{3(a+b+c)}{3} = a+b+c \quad \text{c.c.t.d.}$$

19. Fie un pătrat $ABCD$ şi M un punct în interiorul pătratului astfel încât $\sphericalangle MAB = \sphericalangle MBA = 15^\circ$. Să se arate că triunghiul MCD este echilateral.

(Ivan Block)

Soluţie. Alegem originea în A şi ca axă reală dreapta AB, ca axă imaginară AD. Considerăm latura pătratului egală cu 1, deoarece se simplifică calculele. Atunci afixele punctelor A, B, C, D sunt $0, 1, 1+i, i$. Fie afixul lui M notat cu m. Segmentul BM se obţine din AM printr-o rotaţie de 150°, aceasta în planul complex; se va scrie:

$$m-1 = (m-0)(\cos 150^\circ + i \sin 150^\circ) \text{ sau}$$

$$(m-1)(\cos 150^\circ - i \sin 150^\circ) = m \quad \text{sau} \quad (m-1)\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right) = m;$$

rezultă:

$$m = \frac{1}{2} + \frac{2-\sqrt{3}}{2}i.$$

Pentru ca triunghiul MCD să fie echilateral trebuie ca afixele m, c, d ale punctelor M, C, D să verifice relaţia:

$$m + c(\cos 120^\circ + i \sin 120^\circ) + d(\cos 240^\circ + i \sin 240^\circ) = 0$$

sau

$$\frac{1}{2} + \frac{2-\sqrt{3}}{2}i + (1+i)\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) + i\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 0$$

care se verifică.

20. Fie K un punct în interiorul triunghiului echilateral ABC şi $M = AK \cap BC$, $N = BK \cap CA$ şi $P = CK \cap AB$, R fiind raza cercului circumscris triunghiului. Să se demonstreze că dacă:

$$\frac{1}{AM} + \frac{1}{BM} + \frac{1}{CP} = \frac{2}{R}$$

atunci K este centrul cercului circumscris triunghiului.

(Viorel Bândilă)

Soluţie. Alegem originea în centrul cercului circumscris şi axa reală trecând prin A, atunci afixele lui A, B, C sunt $R, R\varepsilon, R\varepsilon^2$ unde:

$$\varepsilon = \cos 120^\circ + i \sin 120^\circ.$$

Fie

$$\frac{MB}{MC} = -x, \quad \frac{NC}{NA} = -y, \quad \frac{PA}{PB} = -z, \text{ unde } x, y, z > 0.$$

Rezultă:

$$m = \frac{R\varepsilon + xR\varepsilon^2}{1+x},$$

$$AM = \left|\frac{R\varepsilon + xR\varepsilon^2}{1+x} - R\right| = R\left|\frac{\varepsilon - 1 + x(\varepsilon^2 - 1)}{1+x}\right| =$$

$$= R\,|\varepsilon - 1|\left|\frac{1+x(\varepsilon+1)}{1+x}\right|.$$

Dar ţinând seamă că:

$$\varepsilon = \cos 120^\circ + i \sin 120^\circ = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

se obţine:

$$|\varepsilon - 1| = \sqrt{3} \text{ şi } |1 + x(\varepsilon+1)| = \sqrt{1+x+x^2}.$$

Deci:

$$\frac{1}{AM} = \frac{1+x}{R\sqrt{3}\sqrt{1+x+x^2}}.$$

Analog rezultă:

$$\frac{1}{BN} = \frac{1+y}{R\sqrt{3}\sqrt{1+y+y^2}} \qquad \frac{1}{CP} = \frac{1+z}{R\sqrt{3}\sqrt{1+z+z^2}}.$$

Trebuie să arătăm că dacă

$$\frac{1+x}{\sqrt{1+x+x^2}} + \frac{1+y}{\sqrt{1+y+y^2}} + \frac{1+z}{\sqrt{1+z+z^2}} = 2\sqrt{3}$$

atunci $x = y = z = 1$; într-adevăr avem

$$\frac{1+x}{\sqrt{1+x+x^2}} \le \frac{2}{\sqrt{3}}$$

care se verifică prin ridicare la pătrat, şi eliminând numitorii după reducerea termenilor asemenea, se obţine $(x-1)^2 \ge 0$ cu egalitate când $x = 1$; analog avem:

$$\frac{1+y}{\sqrt{1+y+y^2}} \le \frac{2}{\sqrt{3}} \text{ şi } \frac{1+z}{\sqrt{1+z+z^2}} \le \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Rezultă cu necesitate $x = y = z = 1$.

21. La un triunghi oarecare ABC se construiesc în afară triunghiurile ADB şi BCE astfel încât $\sphericalangle ADB = \sphericalangle BEC = 90^\circ$ şi $\sphericalangle DAB = \sphericalangle EBC = 30^\circ$. Pe latura AC se alege un punct F astfel încât $AF = 3FC$.

Să se demonstreze că în triunghiul DEF: $\sphericalangle DEF = 90^\circ$ şi $\sphericalangle FDE = 30^\circ$.

(Propusă pentru a XVI-a O.I.M 1974)

Soluţie. Notăm afixele punctelor A, B, C, D, E, F cu literele a, b, c, d, e, f. Segmentul $|AD|$ se obţine din segmentul BD printr-o rotaţie de 90° şi o omotetie de raport

$$\frac{AD}{BD} = \frac{\sin 60^\circ}{\sin 30^\circ} = \sqrt{3}.$$

Aceasta în planul complex se scrie:

$$\frac{a-d}{b-d} = i\sqrt{3} \text{ analog } \frac{b-e}{c-e} = i\sqrt{3} \tag{1}$$

Din relaţiile (1) rezultă:

$$d = \frac{a - i\sqrt{3}\,b}{1 - i\sqrt{3}}, \quad e = \frac{b - i\sqrt{3}\,c}{1 - i\sqrt{3}} \tag{2}$$

Din relaţia $AF = 3FC$ rezultă în planul complex $f - a = 3(c - f)$, de unde rezultă:

$$f = \frac{a + 3c}{4} \tag{3}.$$

Calculăm valoarea raportului $\frac{d-f}{e-f}$ ţinând seama de (2) şi (3).

Obţinem:

$$\frac{d-f}{e-f} = \frac{\dfrac{a - i\sqrt{3}\,b}{1 - i\sqrt{3}} - \dfrac{a+3c}{4}}{\dfrac{b - i\sqrt{3}\,c}{1 - i\sqrt{3}} - \dfrac{a+3c}{4}} = \frac{4(a - i\sqrt{3}\,b) - (1 - i\sqrt{3})(a+3c)}{4(b - i\sqrt{3}\,c) - (1 - i\sqrt{3})(a+3c)} =$$

$$= \frac{(3 + i\sqrt{3})a - 4i\sqrt{3}\,b - 3(1 - i\sqrt{3})c}{(i\sqrt{3} - 1)a + 4b - (i\sqrt{3} + 3)c} = -i\sqrt{3} \quad \text{deci} \quad \frac{d-f}{e-f} = -i\sqrt{3}.$$

Ultima relaţie arată că segmentul DF se obţine din segmentul EF printr-o rotaţie în jurul punctului F de 90° în sens invers trigonometric şi o omotetie de raport egal cu $\sqrt{3}$. Deci:

$$\sphericalangle DEF = 90^\circ \text{ şi } \frac{DF}{EF} = \operatorname{tg} \mathbf{DEF} = \sqrt{3} \quad \text{deci} \quad \sphericalangle DEF = 60^\circ.$$

Rezultă $\sphericalangle FDE = 30^\circ$ c.c.t.d.

22. Fie triunghiul ABC. Se roteşte latura AC în sens trigonometric în jurul lui A cu unghi α, de asemenea AB se roteşte în jurul lui B cu acelaşi unghi α, BC se roteşte în jurul lui C tot cu unghiul α; fie C_0, A_0, B_0 noile poziţii ale lui C, A şi B. Să se arate că triunghiul $A_0B_0C_0$ are acelaşi centru de greutate cu triunghiul ABC.

Soluţie. Fie afixele punctelor A, B, C, A_0, B_0, C_0 notate cu a, b, c, a_0, b_0, c_0.

$$\begin{aligned} c_0 - a &= (c-a)(\cos\alpha + i\sin\alpha) \\ a_0 - b &= (a-b)(\cos\alpha + i\sin\alpha) \\ b_0 - c &= (b-c)(\cos\alpha + i\sin\alpha) \end{aligned} \tag{1}$$

Adunând relaţiile (1) membru cu membru obţinem:

$$c_0 + a_0 + b_0 - (a+b+c) = (c - a + a - b + b - c)(\cos\alpha + i\sin\alpha) = 0$$

deci:

$$c_0 + a_0 + b_0 = a + b + c, \quad \frac{c_0 + a_0 + b_0}{3} = \frac{a+b+c}{3}.$$

Centrele de greutate ale celor două triunghiuri au acelaşi afix, deci coincid.

23. Se consideră un triunghi ABC. În planul său, în exteriorul acestui triunghi, se construiesc triunghiurile ABR, CAQ, BCP astfel încât:
$\sphericalangle ABR = \sphericalangle BAR = 15^\circ$; $\sphericalangle CAQ = \sphericalangle CBP = 45^\circ$; $\sphericalangle ACQ = \sphericalangle BCP = 30^\circ$.
Să se arate că $RP = RQ$ şi $\sphericalangle PRQ = 90^\circ$.

(Propusă de Olanda la a 17-a O.I.M.)

Soluţie. Alegem originea axelor în R, fie afixele punctelor notate cu litere mici corespunzătoare. Trebuie arătat că $p = qi$. Fie U proiecţia lui Q pe AC şi V proiecţia lui P pe BC. Avem:

$$\frac{CU}{UA} = \operatorname{tg}30^\circ / \operatorname{tg}45^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

deci afixul u al punctului U se va exprima în funcţie de afixele a şi c:

$$u = \frac{c + \sqrt{3}\,a}{1 + \sqrt{3}} \tag{1}.$$

Segmentul $|QU|$ se obţine din segmentul $|AU|$ printr-o rotaţie de 90°, deci:

$$q - u = (a - u)i.$$

Rezultă:

$$q = u + (a-u)i = \frac{c + \sqrt{3}\,a}{1 + \sqrt{3}} + \left(a - \frac{c + \sqrt{3}\,a}{1 + \sqrt{3}}\right)i = \frac{(1-i)c + (\sqrt{3} + i)a}{1 + \sqrt{3}} \tag{2}.$$

Avem:

$$\frac{CV}{VB} = \operatorname{tg}30^\circ / \operatorname{tg}45^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

rezultă:

$$v = \frac{c + \sqrt{3}\,b}{1 + \sqrt{3}} \tag{3}.$$

Segmentul $|PV|$ se obţine din segmentul $|BV|$ printr-o rotaţie negativă de 90°, deci:

$$p - v = (b - v)(-i); \; p = v + (b-v)(-i) = \frac{(1+i)c + (\sqrt{3} - i)b}{1 + \sqrt{3}} \tag{4}.$$

Segmentul $|BR|$ se obţine din segmentul $|AR|$ printr-o rotaţie de 150°, deci:

$$b = a(\cos 150^\circ + i\sin 150^\circ) = a\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right) \tag{5}.$$

Din relaţiile (2), (4), (5) rezultă că $p = qi$.

24. Fie $ABCD$ un patrulater convex. Notăm cu M şi N mijloacele laturilor opuse AB respectiv CD iar cu E şi F mijloacele diagonalelor AC şi BD. Să se arate că:

a) mijloacele segmentelor $|MC|$, $|MD|$, $|NA|$, $|NB|$ sunt vârfurile unui paralelogram.

b) mijloacele segmentelor $|AF|$, $|BE|$, $|CF|$, $|DE|$ sunt vârfurile unui paralelogram.

c) dacă $AD^2 + BC^2 = 2\,EF^2$, atunci $ABCD$ este paralelogram.

Soluţie. a) Notăm cu litere mici corespunzătoare afixele punctelor din problemă. Fie G, H, I, J mijloacele segmentelor $|MC|$, $|MD|$, $|NA|$, $|NB|$. Atunci avem calculând pe rând:

$$m = \frac{a+b}{2} \text{ şi } n = \frac{c+d}{2},\ g = \frac{a+b}{4} + \frac{c}{2};\ h = \frac{a+b}{2} + \frac{d}{2};$$

$$i = \frac{c+d}{4} + \frac{a}{2};\ j = \frac{c+d}{4} + \frac{b}{2}.$$

Se observă că $g + h = i + j$, adică mijlocul lui $|GH|$ coincide cu mijlocul lui $|IJ|$ deci $GIHJ$ este un paralelogram.

b) Fie P, R, S, T mijloacele segmentelor $|AF|$, $|BE|$, $|CF|$, $|DE|$. Avem:

$$e = \frac{a+c}{2},\ f = \frac{b+d}{2},\ p = \frac{2a+b+d}{4},$$

$$r = \frac{a+c+2b}{4},\ s = \frac{2c+b+d}{4},\ t = \frac{a+c+2d}{4}.$$

Observăm că $p + s = r + t$, adică segmentele $|PS|$ şi $|RT|$ au acelaşi mijloc, deci $PRST$ este un paralelogram.

c) Din condiţia problemei $AD^2 + BC^2 = 2\,EF^2$ rezultă:

$$(d-a)(\bar{d}-\bar{a}) + (c-b)(\bar{c}-\bar{b}) = 2\left(\frac{a+b-c-d}{2}\right)\left(\frac{\bar{a}+\bar{b}-\bar{c}-\bar{d}}{2}\right)$$

sau

$$2(d-a)(\bar{d}-\bar{a}) + 2(c-b)(\bar{c}-\bar{b}) = (a-d)(\bar{a}-\bar{d}) + (a-d)(\bar{b}-\bar{c}) + (b-c)(\bar{a}-\bar{d}) + (b-c)(\bar{b}-\bar{c}) \quad (1).$$

Făcând reducerile de termeni asemenea şi regrupând termenii şi dând factor comun în relaţia (1) se obţine:

$$(a+c-b-d)(\bar{a}+\bar{c}-\bar{b}-\bar{d}) = 0$$

de unde rezultă $a + c = b + d$, adică $ABCD$ este paralelogram.

25. Pe ipotenuza AB a triunghiului dreptunghic OAB se iau punctele M şi N, astfel ca $AM = MN = NB$. Notăm $\sphericalangle AOM = x$, $\sphericalangle MON = y$, $\sphericalangle NOB = z$. Să se arate că $3 \sin x \cdot \sin z = \sin y$.

Soluţie. Alegem ca axă reală pe OA iar pe OB ca axă imaginară. Fie $A(a, O)$; $B(O, b)$. Avem $\frac{MA}{MB} = -\frac{1}{2}$. Cum afixul lui A este a, iar al lui B este bi, rezultă că afixul lui M este:

$$m = \frac{2a+bi}{3} \quad (1).$$

Avem, de asemenea, $NA/NB = -2$ deci afixul lui N este:

$$m = \frac{a+2bi}{3} \quad (2).$$

Dar $m = |m|(\cos x + i \sin x)$ sau

$$\frac{2a+bi}{3} = \frac{\sqrt{b^2+4a^2}}{3}(\cos x + i \sin x)$$

de unde rezultă:

$$\cos x + i \sin x = \frac{2a+bi}{\sqrt{b^2+4a^2}} \text{ şi } \cos x - i \sin x = \frac{2a-bi}{\sqrt{b^2+4a^2}}$$

de unde, prin scădere, obţinem:

$$\sin x = \frac{b}{\sqrt{b^2+4a^2}} \quad (3).$$

ON se obţine prin OM printr-o rotaţie de unghi de măsură y şi o omotetie de raport:

$$\frac{|n|}{|m|} \text{ deci } \frac{n}{m}\left|\frac{m}{n}\right| = \cos y + i \sin y$$

sau

$$\frac{a+2bi}{2a+bi}\sqrt{\frac{b^2+4a^2}{a^2+4b^2}} = \cos y + i \sin y$$

şi

$$\frac{a-2bi}{2a-bi}\sqrt{\frac{b^2+4a^2}{a^2+4b^2}} = \cos y - i \sin y.$$

Obţinem prin scăderea celor două relaţii; după unele calcule:

$$\sin y = \frac{3ab}{\sqrt{(b^2+4a^2)(4b^2+a^2)}} \quad (4).$$

OB se obţine din OM printr-o rotaţie de unghi de măsură z şi o omotetie de raport egal cu $\frac{|n|}{|bi|}$

deci:

$$\frac{bi}{n}\left|\frac{n}{bi}\right| = \cos z + i \sin z$$

sau

$$\frac{3bi}{a+2bi}\frac{\sqrt{b^2+4b^2}}{3b} = \cos z + i \sin z$$

şi

$$\frac{-3bi}{a-2bi}\frac{\sqrt{a^2+4b^2}}{3b} = \cos z - i \sin z$$

de unde, prin scădere, obţinem:

$$\sin z = \frac{a}{\sqrt{a^2 + 4b^2}} \qquad (5).$$

Din relaţiile (3), (4) şi (5) rezultă:

$$3 \sin x \sin z = \sin y \text{ c.c.t.d.}$$

26. De aceeaşi parte a segmentului AB construim trei triunghiuri asemenea ABK, BLA, MAB astfel ca:

$$\sphericalangle KAB = \sphericalangle ABL = \sphericalangle BMA = \alpha$$
$$\sphericalangle KBA = \sphericalangle ALB = \sphericalangle BAM = \beta$$
$$\sphericalangle AKB = \sphericalangle BAL = \sphericalangle MBA = \gamma$$

cu $\alpha < \beta < \gamma$.

Să se arate că triunghiul MLK este asemenea cu triunghiurile construite.

(Problema 7776 din G.M.nr. 10 propusă pentru O. I. M. de R. P. Polonă)

Soluţie. Notăm afixele punctelor A, B, K, L, M cu literele a, b, k, l, m. Deoarece triunghiurile ABK, BLA şi MAB sunt asemenea, rezultă:

$$k - a = \lambda(k - b);\ a - b = \lambda(a - l);\ (b - m) = \lambda(b - a),\ \lambda \in \mathbf{C}$$

sau

$$\begin{cases} a - \lambda b = k - \lambda k \\ (1 - \lambda)a - b = -\lambda l \\ \lambda a + (1 - \lambda)b = m \end{cases} \qquad (1).$$

Relaţiile (1) exprimă un sistem în două necunoscute a şi b cu trei ecuaţii; pentru a fi compatibil, trebuie ca:

$$\begin{vmatrix} 1 & -\lambda & k - \lambda k \\ 1 - \lambda & -1 & -\lambda l \\ \lambda & 1 - \lambda & m \end{vmatrix} = 0 \qquad (2).$$

Pentru a calcula determinantul (2), scădem din prima linie suma celorlalte două linii şi apoi dezvoltăm după prima linie în noul determinant şi obţinem:

$$(\lambda^2 - \lambda + 1)(k - \lambda k + \lambda l - m) = 0$$

de unde rezultă:

$$\lambda^2 - \lambda + 1 = 0 \text{ sau } k - \lambda k + \lambda l - m = 0.$$

Din prima ecuaţie rezultă:

$$\lambda = \frac{1}{2} \pm i\frac{3}{2}.$$

Ar rezulta că triunghiurile ABK, BLA, MAB sunt echilaterale şi acest caz este exclus. Ar însemna $\alpha = \beta = \gamma$ ori $\alpha < \beta < \gamma$. Din a doua ecuaţie rezultă:

$$\frac{k - m}{k - l} = \lambda$$

adică triunghiurile construite sunt asemenea cu triunghiul MLK c.c.t.d.

27. Fie ABC un triunghi echilateral. Ducem paralele arbitrare MM' şi NN' la latura BC, M şi N fiind situate pe BA, M', N' pe CA. Dovediţi că mijloacele segmentelor $|CM|$, $|BN'|$, $|NM'|$ formează un triunghi echilateral.

Soluţie. Fie afixele lui A, B, C notate cu 1, ε, ε^2 unde $\varepsilon^3 = 1$ este rădăcina cubică a unităţii. Fie, de asemenea, afixele punctelor M, N, M', N' notate cu literele mici corespunzătoare m, n, m', n'. Notăm:

$$\frac{AM}{MB} = k, \quad \frac{AN}{NB} = p;$$

ţinând seama de teorema lui Thales rezultă:

$$m = \frac{1 + k\varepsilon}{1 + k}, \quad m' = \frac{1 + k\varepsilon^2}{1 + k}, \quad n = \frac{1 + p\varepsilon}{1 + p}, \quad n' = \frac{1 + \varepsilon^2}{1 + p}.$$

Fie Q, L, S mijloacele segmentelor CM, BN', NM' şi afixele lor notate cu q, l, s.

$$q = \frac{m + \varepsilon^2}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1 + k\varepsilon}{1 + k} + \varepsilon^2\right) = \frac{1 + k\varepsilon + k\varepsilon^2 + \varepsilon^2}{2(1 + k)} \qquad (1)$$

$$l = \frac{n' + \varepsilon}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1 + p\varepsilon^2}{1 + p} + \varepsilon\right) = \frac{1 + \varepsilon + p\varepsilon + p\varepsilon^2}{2(1 + p)} \qquad (2)$$

$$s = \frac{n + m'}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1 + p\varepsilon}{1 + p} + \frac{1 + k\varepsilon^2}{1 + k}\right) =$$

$$= \frac{1 + k + (1 + k)p\varepsilon + 1 + p + (1 + p)k\varepsilon^2}{2(1 + k)(1 + p)} \qquad (3).$$

Trebuie să arătăm că:

$$q + l\varepsilon + s\varepsilon^2 = 0 \text{ sau } q\varepsilon^2 + l\varepsilon + s = 0 \text{ sau}$$

$$\frac{1 + k + (1 + k)p\varepsilon + 1 + p + (1 + p)k\varepsilon^2}{2(1 + k)(1 + p)} + \frac{1 + \varepsilon + p\varepsilon + p\varepsilon^2}{2(1 + p)}\varepsilon +$$

$$+ \frac{1 + k\varepsilon + k\varepsilon^2 + \varepsilon^2}{2(1 + k)}\varepsilon^2 = 0.$$

În adevăr, eliminând numitorii obţinem:

$$2k + p + (1 + k)p\varepsilon + (1 + p)k\varepsilon^2 + (1 + k)\varepsilon + (1 + k)(1 + p)\varepsilon^2 + (1 + k)p +$$

$$+ (1 + p)\varepsilon^2 + (1 + p)k + (1 + k)(1 + p)\varepsilon = 2(1 + k)(1 + p)(1 + \varepsilon + \varepsilon^2) = 0.$$

28. Se dă patrulaterul convex $ABCD$, M şi N mijloacele diagonalelor AC respectiv BD şi P, N, S, T mijloacele segmentelor AN, MB, NC respectiv MD. Să se arate că patrulaterul $PRST$ este paralelogram.

Soluţie. Fie a, b, c, d afixele punctelor A, B, C, D. Atunci afixele punctelor M şi N sunt $\frac{a + c}{2}$ şi respectiv $\frac{b + d}{2}$. Afixele punctelor P, R, S, T sunt deci:

$$\frac{2a + b + d}{4}, \quad \frac{a + 2b + c}{4}, \quad \frac{b + 2c + d}{4}$$

şi respectiv:

$$\frac{a+c+2d}{4}.$$

Deoarece:

$$\frac{2a+b+d}{4}+\frac{b+2c+d}{4}=\frac{a+2b+c}{4}+\frac{a+c+2d}{4}$$

rezultă că segmentele PS şi RT au acelaşi mijloc, de unde deducem că $PRST$ este paralelogram.

29. Pe înălţimea AD a triunghiului ABC se consideră punctul H. Să se arate că proiecţiile lui D pe dreptele BA, BH, CA, CH determină un patrulater inscriptibil.

(Gazeta Matematică, problema 19058, A.V. Mihai)

Soluţie. O soluţie geometrică a acestei probleme se găseşte în Gazeta Matematică nr. 12 din 1982, pag. 457. Vom da o soluţie a acestei probleme folosind numerele complexe.

Alegem ca axă reală dreapta BC, iar ca axă imaginară dreapta AD. Fie ai, b, c afixele punctelor A, B, C şi xi afixul punctului H. Notăm cu z_1, z_2, z_3, z_4 afixele proiecţiilor punctului D pe dreptele BA, BH, CA şi CH. Ecuaţia dreptei AB este:

$$z(bi-a)-z(bi+a)-2ab=0,$$

de unde determinăm imediat

$$z_1=\frac{ab}{a-bi}.$$

Analog determinăm că:

$$z_2=\frac{bx}{x-bi},\ z_3=\frac{ac}{a-ci}\ \text{şi}\ z_4=\frac{cx}{x-ci}.$$

Ţinând cont că a, b, c, x sunt numere reale, observăm că

$$\frac{z_3-z_1}{z_3-z_2}:\frac{z_4-z_1}{z_4-z_2}=\frac{a^2x^2(c-b)^2}{a^2x^2(c-b)^2+b^2c^2(a-x)^2}\in\mathbf{R}$$

de unde rezultă imediat că punctele $M_1(z_1)$, $M_2(z_2)$, $M_3(z_3)$, $M_4(z_4)$ sunt conciclice.

30. Fie un triunghi ABC şi punctele A', B', C' situate pe BC, AC respectiv AB astfel încât să avem:

$$\frac{BA'}{A'C}=\frac{CB'}{B'A}=\frac{AC'}{C'B}=k.$$

Să se arate că triunghiurile ABC şi $A'B'C'$ au acelaşi centru de greutate.

(Problema lui Pappus)

Soluţie: Problema s-a dat şi la Concursul de matematică faza finală în anul 1981 şi în G.M. nr. 12 din 1982 s-au dat două soluţii. Vom da o soluţie

folosind numerele complexe. Alegem pe G, centrul de greutate al triunghiului ABC, ca origine; atunci fie a, b, c afixele punctelor A, B, C. Rezultă deci că:

$$a+b+c=0.$$

Fie x, y, z afixele punctelor A', B', C'. Deci avem:

$$x=\frac{a+bk}{1+k},\ y=\frac{b+ck}{1+k},\ \text{şi}\ z=\frac{c+ak}{1+k}.$$

Centru de greutate G' al triunghiului $A'B'C'$ va avea afixul

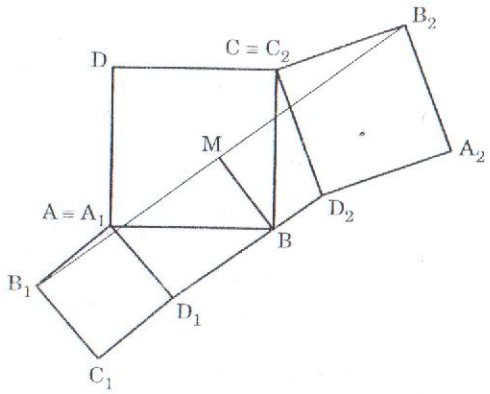
$$z'=\frac{1}{3}(x+y+z)=\frac{1}{3}(a+b+c)=0$$

şi, prin urmare, $G'=0$ adică cele două triunghiuri au acelaşi centru de greutate.

31. Se consideră în plan pătratele $ABCD$, $A_1B_1C_1D_1$ şi $A_2B_2C_2D_2$ în acelaşi mod orientate. Fie $A\equiv A_1$ şi $C\equiv C_2$. Dacă M este mijlocul lui B_1B_2, să se arate că:

a) $D_1D_2=2BM$

b) $D_1D_2\perp BM$.



Soluţie. Alegem punctul A ca origine. Fie O, $a+x$, $a+y$ afixele punctelor A, B, D_1, D_2. Fie c, b_1, b_2 afixele punctelor C, B_1 şi B_2. Din faptul că CB se poate obţine printr-o rotaţie de unghi $\frac{3\pi}{2}$ a lui AB, putem scrie că:

$$c-b=-i(0-a),\ \text{unde}\ c=a+ai.$$

Analog se calculează

$$b_2-c=i(d_2-c)\Rightarrow b_2=2a+ia+ix$$

$$b_1-0=-i(d_1-0)\Rightarrow b_1=-i(a+y).$$

Afixul m al punctului M mijlocul segmentului B_1B_2 este

$$m=\frac{2a+i(x-y)}{2}.$$

Atunci

$$BM = \left| a - a - \frac{i(x-y)}{2} \right| = \frac{|x-y|}{2} \text{ şi } D_1D_2 = |a+x-a-y| = |x-y|$$

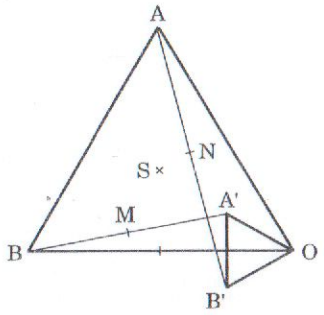
şi rezultă că $D_1D_2 = 2 \cdot BM$.

b) Observăm că

$$\frac{b-m}{d_1-d_2} = \frac{a - \frac{2a - i(b-c)}{2}}{a+c-a-b} = \frac{-i(b-c)}{2(c-b)} = \frac{i}{2} \Rightarrow \arg\frac{b-m}{d_1-d_2} = \frac{\pi}{2}$$

de unde deducem că $D_1D_2 \perp BM$.

32. Fie un triunghi echilateral ABO cu centrul S şi un alt triunghi echilateral $A'B'O$, având cu primul triunghi vârful O, cu $A' \neq S$ şi $B' \neq S$, astfel încât unghiurile $A'OB'$ şi AOB să aibă o aceeaşi orientare. Dacă M este mijlocul lui $A'B$ şi N mijlocul lui AB' să se demonstreze că triunghiurile $SB'M$ şi $SA'N$ sunt asemenea.



(Propusă la O.I.M., 1978)

Soluţie. Alegem pe S ca origine şi fie z afixul lui O. Atunci afixele lui A şi B sunt εz şi $\varepsilon^2 z$, unde $\varepsilon^3 = 1$ şi $\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$. Deoarece $\overrightarrow{SB'} = \overrightarrow{SQ} + \overrightarrow{OB'}$, atunci putem lua pe $z + t$ afixul lui B' şi deci $z - \varepsilon t$ este afixul lui A'. Afixul x al punctului N mijlocul lui AB' este

$$x = \frac{\varepsilon z + z + t}{2} = \frac{(\varepsilon+1)z + t}{2} = \frac{-\varepsilon^2 z + t}{2} = \frac{z - \varepsilon t}{-2\varepsilon}.$$

Afixul y al punctului M mijlocul lui $A'B$ este

$$y = \frac{\varepsilon^2 z + z - \varepsilon t}{2} = \frac{z(\varepsilon^2+1) - \varepsilon t}{2} = \frac{-\varepsilon z - \varepsilon t}{2} = \frac{-\varepsilon(z+t)}{2}.$$

Deci

$$SM = \frac{|-\varepsilon(z+t)|}{2} = \frac{|z+t|}{2}; \quad SB' = z + t$$

$$SN = \left| \frac{z - \varepsilon t}{-2\varepsilon} \right| = \frac{|z - \varepsilon t|}{2}; \quad SA' = |z - \varepsilon t|.$$

Rezultă deci că

$$\frac{SM}{SB'} = \frac{SN}{SA'} = \frac{1}{2}$$

de unde

$$\frac{SM}{SN} = \frac{SB'}{SA'} \quad (1).$$

Analog găsim că

$$B'M = |z + t - \frac{\varepsilon(z+t)}{2}| = |z+t| \left| \frac{2-\varepsilon}{2} \right| = |z+t| \frac{\sqrt{3}}{2}$$

şi

$$A'N = \left| z - \varepsilon t + \frac{z - \varepsilon t}{2\varepsilon} \right| = \frac{|(2\varepsilon+1)(z-\varepsilon t)|}{2\varepsilon} = |z - \varepsilon t| \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Rezultă deci că:

$$\frac{SM}{SN} = \frac{B'M}{A'N} \quad (2).$$

Din (1) şi (2) rezultă că triunghiurile SMB' şi SNA' sunt asemenea, dar invers orientate.

33. Să se afle latura unui triunghi echilateral ale cărui vârfuri se află pe trei drepte paralele care au distanţele între ele a şi b.

Soluţie. Fie d_1, d_2, d_3 cele trei drepte paralele, $A \in d_1$ şi $B \in d_2$; atunci $C \in d_3$. Alegem originea în B şi axa reală să fie chiar d_2. Atunci avem A de afix $a = g + ai$, B de afix $b = 0$ şi C de afix $c = p - bi$. Punctul A se obţine din C printr-o rotaţie în jurul lui B de 60°, deci în complex avem $g + ia = (p - bi)$ $(\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ)$ sau $g = (p - bi)\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ de unde, egalând părţile reale şi respectiv părţile complexe, obţinem sistemul:

$$\begin{cases} g = \frac{p}{2} + \frac{b\sqrt{3}}{2} \\ a = \frac{\sqrt{3}p}{2} - \frac{b}{2} \end{cases}$$

de unde găsim că $p = \left(a + \frac{b}{2}\right) \cdot \frac{2}{\sqrt{3}}$.

Deci

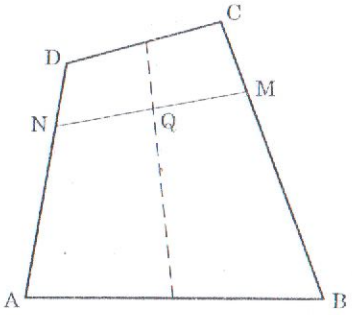
$$BC = |p - ib| = \sqrt{p^2 + b^2} = \sqrt{\left[\left(a + \frac{b}{2}\right)\frac{2}{\sqrt{3}}\right]^2 + b^2} = 2\sqrt{\frac{a^2 + b^2 + ab}{3}}.$$

34. Fie un patrulater convex $ABCD$, $N \in AD$, $M \in BC$, $\frac{MB}{MC} = \frac{NA}{ND}$ şi P, Q, R mijloacele segmentelor AB, MN şi DC. Să se arate că P, Q, R sunt coliniare.

Soluţie. Fie a, b, c, d, p, q, r afixele punctelor A, B, C, D, P, Q, R. Fie $\frac{MN}{MC} = \frac{NA}{ND} = k$ = număr real, deci,

$$m = \frac{b - kc}{1 - k},\ n = \frac{a - kd}{1 - k},\ p = \frac{a + b}{2},\ r = \frac{d + c}{2}$$

$$q = \frac{m + n}{2} = \frac{b - kc + a - kd}{2(1 - k)} = \frac{a + b - k(c + d)}{2(1 - k)}$$



Să arătăm că există k_i, i = 1, 2, 3 cu proprietatea:

$$k_1 p + k_2 q + k_3 r = 0 \text{ şi } k_1 + k_2 + k_3 = 0.$$

Luăm $k_1 = -\frac{1}{1 - k}$, $k_2 = 1$, $k_3 = \frac{k}{1 - k}$.

35. Pe laturile AB, AC ale unui triunghi oarecare, se consideră punctele M şi N astfel ca: $\frac{MB}{MA} + \frac{NC}{NA} = 1$.

Să se demonstreze că dreapta MN trece prin centrul de greutate al triunghiului.

(Mihalca Dan, G.M. nr. 12/1967)

Soluţie. Alegem originea axelor în A; atunci afixul lui A este $a = 0$; fie b, c, m, n, g afixele punctelor B, C, M, N, G (G = centrul de greutate al lui ABC). Notăm $\frac{MB}{MA} = p_1$ = nr. real; $\frac{NC}{NA} = p_2$ = nr. real; p_1, p_2 - pozitive. Avem $m = b:(1 + p_1)$; $n = c:(1 + p_2)$; $g = \frac{b + c}{3}$; $p_1 + p_2 = 1$. Fie $p_1 = k$, deci $p_2 = 1 - k$,

rezultă $m = \frac{b}{1 + k}$; $n = \frac{c}{2 - k}$. $k_1 m + k_2 g + k_3 n = 0$ şi $k_1 + k_2 + k_3 = 0$; luăm $k_1 = 1 + k$; $k_2 = -3$; $k_3 = 2 - k$ şi obţinem condiţia ca punctele M, G, N să fie coliniare

36. În cartea lui I.V. Proskuryakov intitulată "*Problems in linear algebra*" la pagina 75 exerciţiile 471 şi 473 se cere să se calculeze determinanţii:

$$\begin{vmatrix} \cos(x_1 - y_1) & \cos(x_1 - y_2) & \dots & \cos(x_1 - y_n) \\ \cos(x_2 - y_1) & \cos(x_2 - y_2) & \dots & \cos(x_2 - y_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \cos(x_n - y_1) & \cos(x_n - y_2) & \dots & \cos(x_n - y_n) \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \sin 2x_1 & \sin(x_1 + x_2) & \dots & \sin(x_1 + x_n) \\ \sin(x_2 + x_1) & \sin(2x_2) & \dots & \sin(x_2 + x_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sin(x_n + x_1) & \sin(x_n + x_2) & \dots & \sin 2x_n \end{vmatrix}$$

Vom arăta că aceşti determinanţi sunt nuli pentru $n \geq 3$. Fie un poligon $A_1A_2...A_n$ ale cărui laturi să facă cu o dreaptă (d) unghiurile de măsură x_1, x_2,..., x_n. Există un astfel de poligon, deoarece îl putem deforma eventual modificând şi lungimile laturilor.

Deoarece $A_1A_2...A_n$ este un contur închis avem:

$$\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3} + \dots + \overrightarrow{A_nA_1} = 0 \qquad (1).$$

Notând cu a_1, a_2,..., a_n lungimile laturilor poligonului, atunci relaţia (1) în planul complex se va scrie:

$$a_1 e^{ix_1} + a_2 e^{ix_2} + \dots + a_n e^{ix_n} = 0 \qquad (2).$$

Înmulţind relaţia (2) pe rând cu e^{-ix_1}, e^{-ix_2},...,e^{-ix_n} care sunt nenule şi separând părţile reale şi imaginare, rezultă sistemele:

$$\begin{cases} a_1\cos(x_1 - y_1) + a_2\cos(x_2 - y_1) + \dots + a_n\cos(x_n - y_1) = 0 \\ a_1\cos(x_1 - y_2) + a_2\cos(x_2 - y_2) + \dots + a_n\cos(x_n - y_2) = 0 \\ \dots \\ a_1\cos(x_1 - y_n) + a_2\cos(x_2 - y_n) + \dots + a_n\cos(x_n - y_n) = 0 \end{cases} \qquad (3)$$

respectiv încă un sistem de forma lui (3) unde în loc de funcţia cosinus este funcţia sinus. Considerând sistemul (3) în necunoscutele a_1, a_2,..., a_n pentru a admite soluţie nebanală trebuie ca determinantul principal să fie nul, deci $\det|\cos(x_i - y_j)| = 0$, $i, j = 1, 2, \dots, n$ adică primul determinant este nul.

Al doilea determinant se obţine din primul făcând $y_1 = 90^\circ - x_1$; $y_2 = 90^\circ - x_2$, ..., $y_n = 90^\circ - x_n$.

37. Un număr complex $z \neq z_2$ este afixul unui punct de pe cercul circumscris triunghiului echilateral având vârfurile de afixe z_1, z_2, z_3, cu $z_1 + \varepsilon z_2 + \varepsilon^2 z_3 = 0$, dacă şi numai dacă

$$z = \frac{z_1 - r\varepsilon z_2}{1 - r\varepsilon},$$

unde $r \in \mathbf{R}$.

Soluţie. Afixul z al oricărui punct de pe cercul circumscris. $z \neq z_2$ are proprietatea că $z - z_0 = u(z_1 - z_0)$, unde z_0 este afixul centrului cercului şi $u \in \mathbf{C}$, $|u| = 1$, $u \neq \varepsilon$. Avem că orice număr u cu această proprietate se scrie sub forma $u = \frac{1 - r\varepsilon^2}{1 - r\varepsilon}$, $r \in \mathbf{R}$ şi reciproc, orice număr de această formă este de modul 1 şi diferit de ε.

În adevăr, dacă $r \in \mathbf{R}$, atunci $1 - r\varepsilon^2$ şi $1 - r\varepsilon$ sunt numere conjugate, al căror cât este deci de modul 1. Dacă $u \neq 1$, $u \neq \varepsilon$ şi $u = \frac{1 - r\varepsilon^2}{1 - r\varepsilon}$, atunci $r = \frac{1 - u}{\varepsilon(\varepsilon - u)}$ este număr real deoarece

$$r = \frac{\overline{1 - u}}{\varepsilon(\varepsilon - u)} = \left(\frac{u - 1}{u}\right) / \left(\frac{u - \varepsilon}{\varepsilon^2 u}\right) = \frac{1 - u}{\varepsilon(\varepsilon - u)} = r.$$

Atunci

$$z = \frac{1 - r\varepsilon^2}{1 - r\varepsilon}(z_1 - z_0) + z_0 = \frac{(1 - r\varepsilon^2)z_1 - r\varepsilon(1 - \varepsilon)z_0}{1 - r\varepsilon}$$

şi ţinând cont că

$$z_0 = \frac{z_2 - \varepsilon z_1}{1 - \varepsilon}$$

obţinem $z = \frac{z_1 - r\varepsilon z_2}{1 - r\varepsilon}$ ceea ce trebuia demonstrat.

38. Dacă z_1, z_2, z_3 sunt trei numere complexe astfel încât $|z_1| = |z_2| = |z_3| = r$ şi $z_2 \neq z_3$, să se demonstreze că:

$$\min_{a \in \mathbf{R}} |az_2 + (1 - a)z_3 - z_1| = \frac{|z_1 - z_2| \cdot |z_1 - z_3|}{2r}$$

(Dorin Andrica)

Solutie. Fie A_1, A_2, A_3 imaginile geometrice ale numerelor complexe z_1, z_2, z_3 şi fie $z = az_2 + (1 - a)z_3$ cu $a \in \mathbf{R}$, iar A imaginea geometrică a numărului complex z.

Este evident că $A \in A_2A_3$. Să notăm cu B piciorul perpendicularei din A_1 pe dreapta A_2A_3.

Avem $|A_1A| \geq |A_1B|$ şi deci:

$$\min_{a \in \mathbf{R}} |az_2 + (1 - a)z_3 - z_1| = |A_1B| = h \qquad (1).$$

Pe de altă parte, în triunghiul $A_1A_2A_3$, avem:

$$[A_1A_2A_3] = \frac{|z_2 - z_3|h}{2} = \frac{|z_1 - z_2| \cdot |z_1 - z_3| \sin(\sphericalangle A_2A_1A_3)}{2}$$

de unde obţinem:

$$h = \frac{|z_1 - z_2| \cdot |z_1 - z_3| \sin(\sphericalangle A_2A_1A_3)}{|z_2 - z_3|} \qquad (2).$$

Din teorema sinusurilor, obţinem:

$$\frac{z_2 - z_3}{\sin(\sphericalangle A_2A_1A_3)} = 2r \text{ adică } \sin(\sphericalangle A_2A_1A_3) = \frac{z_2 - z_3}{2r} \qquad (3).$$

Din (2) şi (3) deducem

$$h = \frac{|z_1 - z_2| \cdot |z_1 - z_3|}{2r} \qquad (4)$$

Din (1) şi (4) rezultă:

$$h = \min_{a \in \mathbf{R}} |az_2 + (1 - a)z_3 - z_1| = \frac{|z_1 - z_2|\,|z_1 - z_3|}{2r}.$$

39. Fie z_1, z_2, z_3 numere complexe nereale, distincte două câte două şi având acelaşi modul. Să se arate că dacă $z_1 + z_2z_3$, $z_2 + z_1z_3$, $z_3 + z_1z_2$ sunt reale, atunci $z_1z_2z_3 = 1$.

Soluţie. Fie $z_1 = r(\cos a_1 + i \sin a_1)$, $z_2 = r(\cos a_2 + i \sin a_2)$, $z_3 = r(\cos a_3 + i \sin a_3)$, cu $r \neq 0$ şi $a_1 \neq k\pi$, $a_2 \neq k\pi$, $a_3 \neq k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. Din ipoteză rezultă relaţiile $\sin a_1 + r \sin(a_2 + a_3) = 0$, $\sin a_2 + r \sin(a_1 + a_3) = 0$, $\sin a_3 + r \sin(a_1 + a_2) = 0$. Notând $a_1 + a_2 + a_3 = b$, rezultă $\sin a_1 + r \sin(b - a_1) = 0$, adică $\sin a_1 + r \sin b \cos a_1 - r \sin a \cos b = 0$, de unde $\operatorname{ctg} a_1 \sin b = \cos b - \frac{1}{r}$ şi alte două relaţii similare. Dacă $\sin b = 0$, rezultă:

$$\operatorname{ctg} a_1 = \operatorname{ctg} a_2 = \operatorname{ctg} a_3,$$

absurd. Atunci $\sin b = 0$ şi $\cos b = \frac{1}{r}$ de unde:

$$r = 1 \text{ şi } z_1z_2z_3 = r^3(\cos b + \sin b) = 1.$$

40. Fie $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ rădăcinile de ordin n ale unităţii.

Calculaţi $\sum \frac{1}{|\varepsilon_i - \varepsilon_j|^2}$, unde suma se face după toţi indicii i, j distincţi.

Soluţie. Mulţimea $|\varepsilon_i - \varepsilon_j|$, $1 \leq i < j \leq n$ reprezintă lungimile tuturor laturilor, diagonalelor şi diametrelor poligonului regulat cu n laturi, înscris în cercul unitate. Dacă $u = 2m + 1$, atunci avem n laturi şi câte m diagonale egale.

$$\sum_{i<j} \frac{1}{|\varepsilon_i - \varepsilon_j|^2} = n \sum_{k=1}^{m} \left(2 - 2\cos\frac{2k\pi}{n}\right)^{-1} = \frac{n}{4} \sum_{k=1}^{m} \operatorname{cosec}^2 \frac{k\pi}{n} = \frac{1}{4} \cdot \frac{n^2 - 1}{6} = \frac{n^3 - n}{24}.$$

Dacă $n = 2m$, atunci sunt în sumă m diametri de lungime 2. Avem:

$$\sum_{i<j} |\varepsilon_i - \varepsilon_j|^{-2} = \frac{m}{f} + \frac{n}{4} \sum_{k=1}^{m-1} \operatorname{cosec}^2 \frac{k\pi}{n} = \frac{n}{8} + \frac{n}{4} \cdot \frac{n^2 - 4}{6} = \frac{n^3 - n}{24}.$$

Rezultă că suma căutată este egală cu $2\left(\frac{n^3 - n}{24}\right) = \frac{n(n^2 - 1)}{12}$.

41. Fie $z = x + iy, x, y \in \mathbf{Q}$ și $|z| = 1$. Arătați că pentru orice n, $|z^{2n} - 1| \in \mathbf{Q}$.

(Concurs S.U.A.).

Soluție. Fie $z^n = u + iv$ cu $u, v \in \mathbf{R}$.

$$|z^{2n} - 1| = |(u + iv)^2 - 1| = \sqrt{(u^2 - v^2 - 1)^2 + 4u^2v^2} = \sqrt{4v^4 + 4u^2v^2} = 2|v|$$

deoarece $u^2 + v^2 = |z^n|^2 = 1$.

Dacă $n > 0$, $u + iv = (x + iy)^n$. Cum $x, y \in \mathbf{Q}$ rezultă

$$u, v \in \mathbf{Q} \Rightarrow |z^{2n} - 1| \in \mathbf{Q}.$$

Dacă $n < 0$, atunci

$$u - iv = \frac{1}{u + iv} = \frac{1}{(x + iy)^n} = (x + y)^{-n} \text{ și } -n > 0,$$

deci din nou $u, v \in \mathbf{Q}$.

42. Demonstrați că numărul

$$(1^2 + i)(2^2 + i)...(n^2 + i) \ (n \in N)$$

este pur complex.

Soluție. Să notăm cu $F(n)$ expresia din enunț. Avem:

$$0 \leq \arg F(n) = \arg(1^2 + i) + \arg(2^2 + i) + ... + (\arg n^2 + i) \leq$$
$$\leq \operatorname{tg}(\arg(1^2 + i)) + \operatorname{tg}(\arg(2^2 + i)) + ... + \operatorname{tg}(\arg(n^2 + i)) =$$
$$= \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{n^2} < 2\pi.$$

43. Fie M_1, M_2, M_3 trei puncte arbitrare situate pe laturile unui triunghi $A_1A_2A_3$. Cercurile $A_1M_2M_3$, $A_2M_3M_1$, $A_3M_1M_2$ au un punct comun.

Soluție. Notăm cu a_i, z_i afixele punctelor A_i, M_i, $i = 1, 2, 3$. Avem din enunț punctele A_2, A_3, M_1 coliniare; atunci

$$\frac{z_1 - a_3}{z_1 - a_2} = \text{nr. real} \qquad (1).$$

Punctele A_1, A_3, M_2 fiind coliniare,

$$\frac{z_2 - a_3}{z_2 - a_1} = \text{nr. real} \qquad (2).$$

Punctele A_1, A_2, M_3 fiind coliniare,

$$\frac{z_3 - a_2}{z_3 - a_1} = \text{nr. real} \qquad (3).$$

De asemenea, pentru un punct arbitrar $M(z)$ al cercului $A_1M_2M_3$, avem $(a_1, z_2, z_3, z) =$ real sau, ținând seama de proprietatea rapoartelor anarmonice $(z_2z_3z\ a_1) =$ nr. real sau:

$$\frac{z - z_2}{z - z_3} : \frac{a_1 - z_2}{a_1 - z_3} = \text{nr. real} \qquad (4).$$

Analog:

$$\frac{z - z_1}{z - z_2} : \frac{a_3 - z_1}{a_3 - z_2} = \text{nr. real} \qquad (5)$$

și

$$\frac{z - z_3}{z - z_1} : \frac{a_2 - z_3}{a_2 - z_1} = \text{nr. real} \qquad (6).$$

Dar (1), (2), (3), (4), (5), (6) = 1 deci condițiile (4), (5), (6) sunt compatibile.

Reciproc, dacă relațiile (1)-(5) sunt reale și (6) este real, adică punctul M (z) comun cercurilor (4) și (5) aparține și cercului (6). De asemenea, dacă relațiile (2)-(6) sunt reale atunci și (1) este real, adică dacă M_2, M_3 sunt pe laturile A_1A_3, A_1A_2 iar M_1 arbitrar, condiția de concurență a cercurilor considerate atrage condiția ca M_1 să fie situat pe A_2A_3. Dacă în plus punctele M_1, M_2, M_3 sunt coliniare, atunci cercurile $A_1M_2M_3$, $A_2M_3M_1$, $A_3M_1M_2$, $A_1A_2A_3$ au un punct comun (*teorema lui Miquel*).

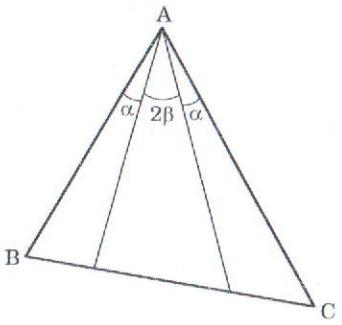
Într-adevăr, din problema precedentă dacă considerăm triunghiul $A_2M_1M_3$ unde M_1 se află pe prelungirea lui A_2A_3, atunci cercurile $M_1M_2A_3$, $M_3M_2A_3$ și $A_2A_3A_1$ au un punct comun. Dar cercurile $M_1M_2A_3$, $M_2M_3A_1$, $M_1M_3A_2$ au un punct comun conform problemei precedente, deci rezultă că cercurile $M_1M_2A_3$, $M_2M_3A_1$, $M_3M_1A_2$, $A_1A_2A_3$ au un punct comun. (c.c.t.d.).

Capitolul III

RELAŢII METRICE

1. Prin vârful A al triunghiului ABC se duc două drepte simetrice în raport cu bisectoarea unghiului A (ceviene izogonale) care întâlnesc latura BC în M şi N. Să se arate că:

$$\frac{CM}{BM}\cdot\frac{CN}{BN}=\frac{AC^2}{AB^2}\quad \textit{(teorema lui Steiner)}$$



Soluţie. Alegem originea în punctul A fie afixele punctelor B, C, M, N notate cu b, c, m, n. Fie $\sphericalangle A = 2\alpha + 2\beta$, $\frac{CM}{BM}=k_1$, $\frac{CN}{BN}=k_2$. Observăm că MA se obţine din BA printr-o rotaţie de unghi α şi o omotetie de raport $p_1=\frac{MA}{BA}$, iar NA se obţine din CA dintr-o rotaţie de unghi α în sens invers trigonometric şi o omotetie de raport $p_2=\frac{NA}{CA}$. În planul complex se va scrie:

$$m=p_1be^{i\alpha},\ n=p_2ce^{-i\alpha},\ \bar{m}=p_1\bar{b}e^{-i\alpha},\ \bar{n}=p_2\bar{c}e^{i\alpha}.$$

Rezultă:

$$m\bar{b}=\bar{m}be^{i2\alpha},\quad \bar{n}c=n\bar{c}e^{i2\alpha} \tag{1}$$

Dar

$$m=\frac{c-k_1b}{1-k_1},\quad n=\frac{c-k_2b}{1-k_2} \tag{2}$$

Înlocuind relaţiile (2) în (1) obţinem:

$$\frac{c-k_1b}{1-k_1}\bar{b}=\frac{\bar{c}-k_1\bar{b}}{1-k_1}be^{i2\alpha}$$

de unde obţinem:

$$k_1=\frac{c\bar{b}-\bar{c}be^{i2\alpha}}{b\bar{b}(1-e^{i2\alpha})}.$$

Analog se obţine

$$k_2=\frac{c\bar{c}(1-e^{i2\alpha})}{c\bar{b}-\bar{c}be^{i2\alpha}}$$

de unde rezultă $k_1k_2=\frac{c\bar{c}}{b\bar{b}}$, adică relaţia de demonstrat.

2. Fie $ABCD$ un patrulater convex cu diagonalele AC şi BD. O dreaptă care trece prin intersecţia diagonalelor taie laturile AB şi CD în punctele M şi N. Să se arate că: $\frac{MA}{MB}\cdot\frac{ND}{NC}=$ constant.

Soluţie. Fie afixele punctelor notate cu literele mici corespunzătoare. Alegem originea în punctul O care este intersecţia diagonalelor AC şi BD.

Fie $\frac{MA}{MB}=k_1$, $\frac{ND}{NC}=k_2$ şi rezultă:

$$m=\frac{a-k_1b}{1-k_1},\ n=\frac{d-k_2c}{1-k_2} \tag{1}$$

Deoarece punctele A, O, C sunt coliniare rezultă:

$$\begin{vmatrix} a & \bar{a} & 1\\ 0 & 0 & 1\\ c & \bar{c} & 1\end{vmatrix}=0 \text{ de unde rezultă } a\bar{c}=\bar{a}c \tag{2}$$

Analog se obţine

$$b\bar{d}=\bar{b}d \tag{3}$$

De asemenea

$$m\bar{n}=\bar{m}n \tag{4}$$

Din relaţiile (1) şi (4) rezultă

$$\frac{a-k_1b}{1-k_1}\frac{\bar{d}-k_2\bar{c}}{1-k_2}=\frac{\bar{a}-k_1\bar{b}}{1-k_1}\frac{d-k_2c}{1-k_2} \tag{5}$$

Din relaţia (5) se obţine, după efectuarea înmulţirilor şi eliminarea numitorilor şi făcând reducerile ţinând seama de relaţiile (2) şi (3),

$$k_1k_2=\frac{a\bar{d}-\bar{a}d}{b\bar{c}-\bar{b}c},\ \text{care este o constantă reală.}$$

3. Se consideră un triunghi echilateral ABC înscris într-un cerc şi un punct M mobil pe cerc. Să se demonstreze că

$$MA^2+MB^2+MC^2=\text{constant}.$$

Soluție. Alegem originea planului complex în centrul cercului și axa reală trecând prin vârful A. Atunci afixele A, B, C sunt R, $R\varepsilon$, $R\varepsilon^2$ unde ε este rădăcina cubică complexă a unității iar afixul lui M este Re^{it}.

$$MA^2 = (Re^{it} - R)(Re^{-it} - R)\,;\ MB^2 = (Re^{it} - R\varepsilon)(Re^{-it} - R\bar{\varepsilon})\,,$$

$$MC^2 = (Re^{it} - R\varepsilon^2)(Re^{-it} - R\bar{\varepsilon}^2)\,.$$

Adunând cele trei expresii obținem:

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 6R^2,$$

deoarece $1 + \varepsilon + \varepsilon^2 = 0$ și, de asemenea, $1 + \bar{\varepsilon} + \bar{\varepsilon}^2 = 0$. Se poate generaliza: pentru poligonul regulat $A_1A_2...A_n$ înscris într-un cerc și punctul M pe cerc, $MA_1^2 + MA_2^2 + \ldots + MA_n^2 = 2nR^2$, R fiind raza cercului. Se alege originea în centrul cercului și axa reală trecând prin A_1. Atunci afixele punctelor A_k sunt $R\varepsilon^{k-1}$, $k = 1, 2, \ldots, n$, iar afixul lui M este Re^{it}. Calculele decurg analog ca și la triunghi și avem:

$$\sum_{k=1}^{n} MA_k^2 = \sum_{k=1}^{n} (Re^{it} - R\varepsilon^{k-1})(Re^{-it} - R\bar{\varepsilon}^{k-1}) =$$

$$= 2nR^2 - R^2e^{2it}\sum_{k=1}^{n}\varepsilon^{k-1} - R^2e^{-it}\sum_{k=1}^{n}\bar{\varepsilon}^{k-1}\,.$$

Dar $1 + \varepsilon + \varepsilon^2 + \ldots + \varepsilon^{n-1} = 0$ și conjugatul acestui număr este tot 0. Adică

$\sum_{k=1}^{n} MA_k^2 =$ constant, ε fiind rădăcină complexă a ecuației $X^n - 1 = 0$.

4. Fie un triunghi oarecare ABC, punctele $D \in AB$, $E \in AC$. Dreptele BE și CD se intersectează în punctul O. O dreaptă ce trece prin O intersectează laturile AB și AC în punctele M și N. Să se arate că există relația:

$$\frac{DA}{DB}\cdot\frac{MB}{MA} + \frac{EA}{EC}\cdot\frac{NC}{NA} = 1.$$

(N. N. Mihăileanu)

Soluție. Alegem originea axelor în O; fie afixele punctelor notate cu litere mici corespunzătoare.

Fie

$$\frac{DA}{DB} = k_1\,,\ \frac{EA}{EC} = k_2\,,\ \frac{MB}{MA} = p_1\,,\ \frac{NC}{NA} = p_2 \qquad (1).$$

Din (1) rezultă:

$$d = \frac{a + k_1b}{1 + k_1}\,,\ e = \frac{a + k_2c}{1 + k_2}\,,\ m = \frac{b + p_1a}{1 + p_1}\,,\ n = \frac{c + p_2a}{1 + p_2} \qquad (2).$$

Punctele D, O, C sunt coliniare; rezultă:

$$\begin{vmatrix} d & \bar{d} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ c & \bar{c} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

de unde rezultă $d\bar{c} = \bar{d}c$; ținând seama de (2) rezultă:

$$(a + k_1b)\bar{c} = (\bar{a} + k_1\bar{b})c$$

de unde obținem

$$a\bar{c} - \bar{a}c = k_1(b\bar{c} - \bar{b}c) \qquad (3)$$

Punctele E, O, B sunt coliniare; rezultă:

$$\begin{vmatrix} e & \bar{e} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ b & \bar{b} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

de unde rezultă

$$e\bar{b} = \bar{e}b\,.$$

Ținând seama de (2) rezultă:

$$(a + k_2c)\bar{b} = (\bar{a} + k_2\bar{c})b$$

de unde obținem

$$a\bar{b} - \bar{a}b = k_2(b\bar{c} - \bar{b}c) \qquad (4).$$

Punctele M, O, N fiind coliniare rezultă:

$$\begin{vmatrix} m & \bar{m} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ n & \bar{n} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

de unde rezultă

$$m\bar{n} = \bar{m}n\,.$$

Ținând seama de (2) rezultă:

$$(b + p_1a)(\bar{c} + p_2\bar{a}) = (\bar{b} + p_1\bar{a})(c + p_2a)\,.$$

Dezvoltând obținem:

$$p_1(a\bar{c} - \bar{a}c) + p_2(a\bar{b} - \bar{a}b) = \bar{b}c - b\bar{c} \qquad (5).$$

Din relația (5) rezultă, ținând seama de (3) și (4), că:

$$p_1k_1 + p_2k_2 = 1$$

adică relația cerută.

5. În triunghiul ABC, mediana corespunzătoare laturii AB intersectează cercul circumscris triunghiului în punctul D. Să se arate că, dacă mijlocul G al coardei CD este centrul de greutate al triunghiului, atunci $a^2 + b^2 = 2c^2$.

Soluție. Fie x, y, z afixele vârfurilor A, B, C. Alegem pe O centrul cercului circumscris ca origine a sistemului. Este suficient să considerăm raza cercului

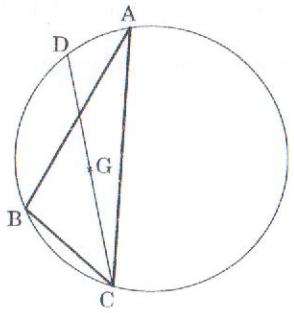
circumscris egală cu unitatea pentru simplificarea calculelor. Rezultă că

$$x\bar{x} = y\bar{y} = z\bar{z} = 1 \qquad (1).$$

Atunci afixul lui G, centrul de greutate al triunghiului ABC, este $g = \frac{x+y+z}{3}$ iar afixul punctului D este $d = \frac{2x+2y-z}{3}$.

Din faptul că D se află pe cercul circumscris triunghiului ABC rezultă că $d\bar{d} = 1$ sau $\frac{2x+2y-z}{3} \cdot \frac{2\bar{x}+2\bar{y}-\bar{z}}{3} = 1$; rezultă:

$$(2x+2y-z)(2\bar{x}+2\bar{y}-\bar{z}) = 9 \qquad (2).$$



Ţinând cont de (1) din (2) rezultă:

$$4(x\bar{y}+y\bar{x}) = 2(x\bar{z}+\bar{x}z)+2(y\bar{z}+\bar{y}z).$$

Atunci:

$$2(x-y)(\bar{x}-\bar{y}) = (x-z)(\bar{x}-\bar{z})+(y-z)(\bar{y}-\bar{z})$$

$$2|x-y|^2 = |x-z|^2+|y-z|^2 \Leftrightarrow$$

$$AC^2+BC^2 = 2AB^2 \Leftrightarrow b^2+a^2 = 2c^2.$$

6. O dreaptă Δ întâlneşte laturile triunghiului ABC în punctele α, β, γ. O fiind un punct în plan, dreptele AO, BO, CO întâlnesc pe (Δ) în α', β', γ'; să se demonstreze relaţia:

$$\frac{\alpha'\beta}{\alpha'\gamma}\,\frac{\beta'\gamma}{\beta'\alpha}\,\frac{\gamma'\alpha}{\gamma'\beta} = 1.$$

(Probleme de geometrie, G. Ţiţeica, ed. a VI-a)

Soluţie. Notăm afixele punctelor A, B, C, α, β, γ, α', β', γ' cu literele a, b, c, α, β, γ, α', β', γ' şi alegem originea în O deci afixul lui O este o.

Avem: $\frac{\alpha'\beta}{\alpha'\gamma} = k_1 =$ real, $\frac{\beta'\gamma}{\beta'\alpha} = k_2 =$ real, $\frac{\gamma'\alpha}{\gamma'\beta} = k_3 =$ real (α', β, γ sunt coliniare); (β', α, γ sunt coliniare); (γ', α, β sunt coliniare) deci:

$$\alpha' = \frac{\beta-k_1\gamma}{1-k_1};\ \beta' = \frac{\gamma-k_2\alpha}{1-k_2};\ \gamma' = \frac{\alpha-k_3\beta}{1-k_3} \qquad (1).$$

Deoarece punctele O, A, α' sunt coliniare rezultă că:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a & \bar{a} & 1 \\ \alpha' & \bar{\alpha}' & 1 \end{vmatrix} = 0$$

de unde $a\bar{\alpha}' = \bar{a}\alpha'$; ţinând seama de (1) rezultă:

$$a\frac{\bar{\beta}-k_1\gamma}{1-k_1} = \bar{a}\frac{\beta-k_1\gamma}{1-k_1}$$

de unde

$$k_1 = \frac{a\bar{\beta}-\bar{a}\beta}{a\bar{\gamma}-\bar{a}\gamma} \qquad (2).$$

Analog O, B, β' fiind coliniare rezultă:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ b & \bar{b} & 1 \\ \beta' & \bar{\beta}' & 1 \end{vmatrix} = 0 \text{ deci } b\bar{\beta}' = \bar{b}\beta'$$

sau

$$b\frac{\bar{\gamma}-k_2\bar{\alpha}}{1-k_2} = \bar{b}\frac{\gamma-k_2\alpha}{1-k_2}$$

de unde

$$k_2 = \frac{b\bar{\gamma}-\bar{b}\gamma}{b\bar{\alpha}-\bar{b}\alpha} \qquad (3).$$

Punctele O, C, γ' sunt coliniare, deci:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ c & \bar{c} & 1 \\ \gamma' & \bar{\gamma}' & 1 \end{vmatrix} = 0$$

adică

$$c\bar{\gamma}' = \bar{c}\gamma' \qquad (6).$$

Înlocuind pe γ' cu valoarea din (1) rezultă:

$$c\frac{\bar{\alpha}-k_3\bar{\beta}}{1-k_3} = \bar{c}\frac{\alpha-k_3\beta}{1-k_3}$$

de unde:

$$k_3 = \frac{c\bar{\alpha}-\bar{c}\alpha}{c\bar{\beta}-\bar{c}\beta} \qquad (4).$$

Înmulţind (2), (3), (4) obţinem:

$$k_1\cdot k_2\cdot k_3 = \frac{a\bar{\beta}-\bar{a}\beta}{a\bar{\gamma}-\bar{a}\gamma}\,\frac{b\bar{\gamma}-\bar{b}\gamma}{b\bar{\alpha}-\bar{b}\alpha}\,\frac{c\bar{\alpha}-\bar{c}\alpha}{c\bar{\beta}-\bar{c}\beta} \qquad (5).$$

Avem

$$\frac{\gamma A}{\gamma B}\frac{\alpha B}{\alpha C}\frac{\beta C}{\beta A} = 1 \text{ (teorema lui Menelaus)} \quad (6)$$

(α, β, γ coliniare) notăm $\frac{\gamma A}{\gamma B} = \lambda_1$ = real, $\frac{\alpha B}{\alpha C} = \lambda_2$ = real, $\frac{\beta C}{\beta A} = \lambda_3$ = real rezultă:

$$\frac{a-\gamma}{b-\gamma} = \lambda_1$$

deci

$$\gamma = \frac{a-\lambda_1}{1-\lambda_1},\ \bar{\gamma} = \frac{a-\lambda_1}{1-\lambda_1}$$

și:

$$(a-\lambda_1 b)\bar{\gamma} = (\bar{a}-\lambda_1\bar{b})\gamma$$

de unde

$$\lambda_1 = \frac{a\bar{\gamma}-\bar{a}\gamma}{b\bar{\gamma}-\bar{b}\gamma} \quad (7)$$

$$\frac{b-\alpha}{c-\alpha} = \lambda_2$$

deci

$$\alpha = \frac{b-\lambda_2 c}{1-\lambda_2},\ \bar{\alpha} = \frac{\bar{b}-\lambda_2\bar{c}}{1-\lambda_2}.$$

Avem:

$$(b-\lambda_2 c)\bar{\alpha} = (\bar{b}-\lambda_2\bar{c})\alpha$$

de unde

$$\lambda_2 = \frac{b\bar{\alpha}-\bar{b}\alpha}{c\bar{\alpha}-\bar{c}\alpha} \quad (8).$$

De asemenea $(c-\lambda_3 a)\bar{\beta} = (\bar{c}-\lambda_3\bar{a})\beta$, de unde

$$\lambda_3 = \frac{c\bar{\beta}-\bar{c}\beta}{a\bar{\beta}-\bar{a}\beta} \quad (9).$$

Înmulțind (7), (8), (9) și ținând seama de (6) rezultă că

$$\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = \frac{a\bar{\gamma}-\bar{a}\gamma}{b\bar{\gamma}-\bar{b}\gamma}\frac{b\bar{\alpha}-\bar{b}\alpha}{c\bar{\alpha}-\bar{c}\alpha}\frac{c\bar{\beta}-\bar{c}\beta}{a\bar{\beta}-\bar{a}\beta} = 1.$$

Ținând seama de (5) rezultă că $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = \frac{1}{k_1k_2k_3} = 1$ deci $k_1k_2k_3 = 1$ c.c.t.d.

7. a) Hexagonul $ABCDEF$ are toate unghiurile egale. Notând cu $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ lungimile laturilor hexagonului, să se dovedească relația $a_1 - a_4 = a_5 - a_2 = a_3 - a_6$.

b) Dacă 6 segmente $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ satisfac relația $a_1 - a_4 = a_5 - a_2 = a_3 - a_6$, atunci cu ele se poate construi un hexagon cu unghiurile egale.

(Problema 8562 - G.M. dată la a 27-a Olimpiadă de Matematică URSS)

a) **Soluție** de *Marian Dincă*. Avem relația vectorială

$$\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} + \vec{DE} + \vec{EF} + \vec{FA} = 0 \quad (1).$$

Alegem ca axă reală pe AB, în planul complex (AB are lungimea a_1). Relația (1) se va scrie:

$$a_1 + a_2 e^{i\frac{\pi}{3}} + a_3 e^{i\frac{2\pi}{3}} + a_4 e^{i\frac{3\pi}{3}} + a_5 e^{i\frac{4\pi}{3}} + a_6 e^{i\frac{5\pi}{3}} = 0 \quad (2)$$

deoarece: - BC face cu AB un unghi de măsură $\pi - \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$

- CD face cu AB un unghi de măsură $\frac{2\pi}{3}$
- DE face cu AB un unghi de măsură $\frac{3\pi}{3} = \pi$
- EF face cu AB un unghi de măsură $\frac{4\pi}{3}$
- FA face cu AB un unghi de măsură $\frac{5\pi}{3}$.

Am ținut seamă de măsura unghiului exterior și un unghi al hexagonului de măsura $\frac{\pi(6-2)}{6} = \frac{2\pi}{3}$.

Deoarece $e^{i\frac{3\pi}{3}} = e^{i\pi} = -1$, $e^{i\frac{4\pi}{3}} = -e^{i\frac{\pi}{3}}$, $e^{i\frac{5\pi}{3}} = -e^{i\frac{2\pi}{3}}$ relația (2) se scrie:

$$a_1 - a_4 + (a_2 - a_5)e^{i\frac{\pi}{3}} + (a_3 - a_6)e^{i\frac{2\pi}{3}} = 0 \quad (3).$$

Notăm: $b_1 = a_1 - a_4$, $b_2 = a_5 - a_2$, $b_3 = a_3 - a_6$ și relația (3) se scrie:

$$b_1 - b_2 e^{i\frac{\pi}{3}} + b_3 e^{i\frac{2\pi}{3}} = 0 \text{ sau: } b_1 - b_2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + b_3\left(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) = 0 \text{ sau}$$

$$b_1 - \frac{b_2 + b_3}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}(b_3 - b_2) = 0,.$$

Rezultă:

$$b_1 - \frac{b_2 + b_3}{2} = 0 \text{ și } b_3 - b_2 = 0 \text{ deci } b_2 = b_3 \text{ și } b_1 = b_2 = b_3$$

adică:

$$a_1 - a_4 = a_5 - a_2 = a_3 - a_6 \quad (4).$$

Pentru punctul b), relația (4) atrage relația (3) care la rândul său atrage relația (2) și (1), ceea ce arată că se poate construi un hexagon cu toate unghiurile egale.

8. Fie ABC un triunghi oarecare, punctul $M \in AB$, punctul $N \in AC$, punctul $D \in BC$ și fie $AD \cap MN = P$. Atunci există relația:

$$\frac{DB}{DC}\cdot\frac{AM}{AN} = \frac{PM}{PN}\cdot\frac{AB}{AC}.$$

Soluție. Fie $\frac{DB}{DC} = k_1$, $\frac{PM}{PN} = k_2$,. $\frac{AM}{AB} = k_3$ $\frac{AN}{AC} = k_4$, $k_i \in R$, $i = 1, 2, 3, 4$.

Relația de demonstrat revine la a arăta că: $k_1k_3 = k_2k_4$.

Fie afixele punctelor A, B, C, D, M, N, P notate cu litere mici corespunzătoare. Alegem originea planului complex în punctul A şi fie de asemenea $\frac{AP}{AD} = k$. Rezultă $\frac{p-a}{d-a} = k$. Cum $a = 0$ rezultă

$$p = kd \tag{1}$$

De asemenea: $m = k_3 b$, $n = k_4 c$,

$$d = \frac{b - k_1 c}{1 - k_1},\ p = \frac{m - k_2 n}{1 - k_2} \tag{2}$$

Din relaţiile (1) şi (2) rezultă:

$$\frac{m - k_2 n}{1 - k_2} = k \cdot \frac{b - k_1 c}{1 - k_1} \text{ sau } \frac{k_3 b - k_2 k_4 c}{1 - k_2} = k \cdot \frac{b - k_1 c}{1 - k_1} \tag{3}$$

Din relaţia (3), egalând coeficienţii lui b şi c rezultă:

$$\frac{k_3}{1 - k_2} = \frac{k}{1 - k_1},\ \frac{k_2 k_4}{1 - k_2} = \frac{k k_1}{1 - k_1}$$

şi, împărţind aceste două relaţii, rezultă $k_1 k_3 = k_2 k_4$ c.c.t.d.

9. Teorema lui Ceva

Se unesc vârfurile A, B, C ale unui triunghi cu un punct O din plan. Dreptele AO, BO, CO întâlnesc laturile BC, CA, AB respectiv în punctele A, B, C. Să se demonstreze că:

$$\frac{A'B}{A'C}\frac{B'C}{B'A}\frac{C'A}{C'B} = -1.$$

Soluţie. Alegem originea axelor în planul complex în punctul O. Fie afixele punctelor A, B, C, A', B', C' notate cu a, b, c, a', b', c'.

Fie $\frac{A'B}{A'C} = k_1$, $\frac{B'C}{B'A} = k_2$, $\frac{C'A}{C'B} = k_3$ rezultă:

$$a' = \frac{b - k_1 c}{1 - k_1} = p_1 a,\ a' = \frac{b - k_1 c}{1 - k_1} = p_1 a.$$

Din aceste relaţii rezultă:

$$(b - k_1 c)\bar{a} = (\bar{b} - k_1 \bar{c})a$$

de unde obţinem:

$$k_1 = \frac{\bar{a}b - a\bar{b}}{\bar{a}c - a\bar{c}} \tag{1}$$

$b' = \frac{c - k_2 a}{1 - k_2} = p_2 b$, $\bar{b}' = \frac{\bar{c} - k_2 \bar{a}}{1 - k_2} = p_2 \bar{b}$. Din aceste relaţii rezultă:

$$(c - k_2 a)\bar{b} = (\bar{c} - k_2 \bar{a})b$$

de unde obţinem:

$$k_2 = \frac{\bar{b}c - b\bar{c}}{\bar{b}a - b\bar{a}} \tag{2}$$

$c' = \frac{a - k_3 b}{1 - k_3} = p_3 c$,, $\bar{c}' = \frac{\bar{a} - k_3 \bar{b}}{1 - k_3} = p_3 \bar{c}$. Din aceste relaţii rezultă:

$$(a - k_3 b)\bar{c} = (\bar{a} - k_3 \bar{b})c$$

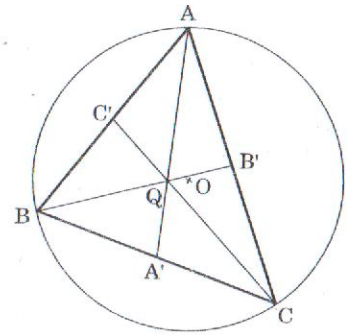
de unde obţinem:

$$k_3 = \frac{\bar{c}a - c\bar{a}}{\bar{c}b - c\bar{b}} \tag{3}$$

Din (1), (2) şi (3) obţinem că

$$k_1 k_2 k_3 = -1.$$

10. Fiind dat un triunghi oarecare, să se calculeze distanţele OI, OG, OK, OH, unde O este centrul cercului circumscris, I centrul cercului înscris, G centrul de greutate, K punctul Lemoine şi H ortocentrul triunghiului.



Soluţie de *Marian Dincă*. Fie un triunghi oarecare ABC, O centrul cercului circumscris triunghiului. Fie dreptele AA', BB', CC' concurente în punctul Q unde $A' \in BC$, $B' \in CA$ şi $C' \in AB$. Conform *teoremei lui Ceva* rezultă că:

$$\frac{BA'}{A'C}\frac{CB'}{B'A}\frac{AC'}{C'B} = 1.$$

Notăm rapoartele

$$BA'/A'C = p/n,\ CB'/B'A = m/p \text{ şi } AC'/C'B = n/m \tag{1}$$

Ne propunem să calculăm OQ^2; pentru aceasta alegem originea axelor în O. Fie afixele punctelor A, B, C notate cu z_1, z_2, z_3. Fie lungimile laturilor triunghiului ABC notate cu a, b, c şi R raza cercului circumscris. Avem:

$$z_1\bar{z}_1 = z_2\bar{z}_2 = z_3\bar{z}_3 = R^2 \tag{2}$$

$$a^2 = (z_2 - z_3)(\bar{z}_2 - \bar{z}_3) = z_2\bar{z}_2 + z_3\bar{z}_3 - (z_2\bar{z}_3 + \bar{z}_2 z_3) = 2R^2 - (z_2\bar{z}_3 + \bar{z}_2 z_3)$$

de unde rezultă

$$z_2\bar{z}_3 + \bar{z}_2 z_3 = 2R^2 - a^2$$

şi analog rezultă:

$$z_1\bar{z}_3 + \bar{z}_1 z_3 = 2R^2 - b^2,\ z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 = 2R^2 - c^2.$$

Notăm afixele lui Q şi A' cu q şi respectiv a'. Din relaţia $\frac{BA'}{A'C} = p/n$ rezultă în complex:

$$a' = \frac{z_2 + (p/n)z_3}{1 + p/n} = \frac{nz_2 + pz_3}{n + p} \quad (3).$$

Relaţia lui Van-Aubel (a se vedea Gh. Ţiţeica "Probleme de geometrie" sau G.M. - B. nr. 4, anul 1966) se scrie astfel:

$$\frac{AQ}{QA'} = \frac{AC'}{C'B} + \frac{AB'}{B'C};$$

ţinând seama de (1) rezultă

$$\frac{AQ}{QA'} = \frac{n}{m} + \frac{p}{m} = \frac{n+p}{m} \quad (4).$$

Relaţia (4) în complex ne dă

$$q = \left(z_1 + \frac{n+p}{m}a'\right) : \left(1 + \frac{n+p}{m}\right) \quad (5).$$

Din relaţiile (3) şi (5) rezultă

$$q = \frac{mz_1 + nz_2 + pz_3}{m+n+p} \quad (6).$$

$$OQ^2 = q\bar{q} = \frac{mz_1 + nz_2 + pz_3}{m+n+p} \cdot \frac{m\bar{z}_1 + n\bar{z}_2 + p\bar{z}_3}{m+n+p} = \frac{(m^2+n^2+p^2)R^2}{(m+n+p)^2} +$$

$$+ \frac{mn(z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2) + np(z_2\bar{z}_3 + \bar{z}_2 z_3) + pm(z_1\bar{z}_3 + \bar{z}_1 z_3)}{(m+n+p)^2} =$$

$$= \frac{(m^2+n^2+p^2)R^2 + mn(2R^2 - c^2) + np(2R^2 - a^2) + pm(2R^2 - b^2)}{(m+n+p)^2} =$$

$$= \frac{(m+n+p)^2R^2 - mnc^2 - npa^2 - pmb^2}{(m+n+p)^2} = R^2 - \frac{mnc^2 + npa^2 + pmb^2}{(m+n+p)^2} \quad (7)$$

Pentru $Q = I$ = punctul de intersecţie al bisectoarelor, se poate lua ţinând seama de teorema bisectoarei $m = a$, $n = b$, $p = c$ şi din relaţia (7) rezultă:

$$OI^2 = R^2 - \frac{abc^2 + bca^2 + cab^2}{(a+b+c)^2} = R^2 - \frac{abc(a+b+c)}{(a+b+c)^2} = R^2 - \frac{abc}{a+b+c} \quad (8).$$

Dar $abc = 4RS$ şi $a + b + c = \frac{2S}{r}$, S fiind aria triunghiului ABC, r fiind raza cercului înscris în triunghiul ABC. Înlocuind în (8) se obţine: $OI^2 = R^2 - 2Rr$.
Pentru $Q = G$ = centrul de greutate al triunghiului ABC (punctul de intersecţie al medianelor) se poate lua $m = n = p = 1$ şi înlocuind în (7) se obţine:

$$OG^2 = R^2 - \frac{a^2+b^2+c^2}{9}.$$

Pentru $Q = K$ = *punctul lui Lemoine* (punctul de intersecţie al simedianelor) simediana (simetrica medianei faţă de bisectoare) împarte latura opusă unghiului din care pleacă într-un raport egal cu pătratul raportului laturilor din

vârful care pleacă ($BA'/A'C = \frac{c^2}{b^2}$, $CB'/B'A = \frac{a^2}{c^2}$, $AC'/C'B = \frac{b^2}{a^2}$). Se poate lua $m = a^2$, $n = b^2$, $p = c^2$ şi înlocuind în (7) se obţine:

$$OK^2 = R^2 - \frac{3a^2b^2c^2}{(a^2+b^2+c^2)^2}.$$

Pentru $Q = H$ = ortocentrul triunghiului ABC, se ştie că afixul h al lui H este $z_1 + z_2 + z_3$ (a se vedea problema 14, capitolul 2).

$$OH^2 = h\bar{h} = (z_1+z_2+z_3)(\bar{z}_1+\bar{z}_2+\bar{z}_3) = z_1\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2 + z_3\bar{z}_3 + (z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2) +$$

$$+ (z_2\bar{z}_3 + \bar{z}z_3) + (z_1\bar{z}_3 + \bar{z}_1 z_3) = R^2 + R^2 + R^2 + (2R^2 - c^2) + (2R^2 - a^2) +$$

$$+ (2R^2 - b^2) = 9R^2 - (a^2+b^2+c^2).$$

11. Fie O centrul cercului circumscris unui triunghi ABC, D mijlocul lui AB şi E centrul de greutate al triunghiului ACD. Să se demonstreze că dreptele CD şi OE sunt perpendiculare dacă şi numai dacă $AB = AC$.

(*Propusă de Bulgaria la a II-a Balcaniadă de matematică*, 1985)

Soluţie. Alegem originea în O; fie afixele punctelor A, B, C, D, E notate cu a, b, c, d, e. Rezultă:

$$d = \frac{a+b}{2}, \quad e = \frac{a+c+d}{3} = \frac{2(a+c)+a+b}{6} = \frac{3a+b+2c}{6} \quad (1).$$

$AB = AC \Leftrightarrow AB^2 = AC^2 \Leftrightarrow (b-a)(\bar{b}-\bar{a}) = (c-a)(\bar{c}-\bar{a})$, dar ţinând seama că $a\bar{a} = b\bar{b} = c\bar{c} = R^2$, R fiind raza cercului, rezultă după desfacerea parantezelor $a\bar{b} + \bar{a}b = a\bar{c} + \bar{a}c$ condiţia ca $AB = AC$.

Vom arăta că dacă x şi y sunt numere complexe atunci:

$$\arg\left(\frac{x}{y}\right) \in \left\{\frac{\pi}{2}, 3\frac{\pi}{2}\right\} \text{ dacă şi numai dacă } x\bar{y} + \bar{x}y = 0 \quad (2).$$

Într-adevăr, condiţia este necesară

$$\arg\left(\frac{x}{y}\right) = 90^\circ \Leftrightarrow \frac{x}{y} = r(\cos 90^\circ + i\sin 90^\circ) = ri.$$

Atunci $\frac{\bar{x}}{\bar{y}} = -ri$ deci $\frac{x}{y} + \frac{\bar{x}}{\bar{y}} = 0$ şi eliminând numitorii rezultă $x\bar{y} + \bar{x}y = 0$.

Condiţia este suficientă: $x\bar{y} + \bar{x}y = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{y} = -\frac{\bar{x}}{\bar{y}}$ fie $\frac{x}{y} = r(\cos u + i\sin u)$ deci $\cos u - i\sin u = -\cos u - i\sin u$ de unde rezultă $\cos u = 0$ deci $u = 90^\circ$ adică $\arg\left(\frac{x}{y}\right) = 90^\circ$ şi cu aceasta am demonstrat (2). Numărul complex $d - c$ ne dă direcţia dreptei CD iar numărul complex $e - 0 = e$ ne dă direcţia dreptei OE.

Ţinând seamă de (2), trebuie să arătăm că $(d-c)\bar{e} + (\bar{d}-\bar{c})e = 0$ sau ţinând seamă de (1) să arătăm că:

$$\left(\frac{a+b}{2}-c\right)\left(\frac{3\bar{a}+\bar{b}+2\bar{c}}{6}\right)+\left(\frac{\bar{a}+\bar{b}}{2}-\bar{c}\right)\left(\frac{3a+b+2c}{6}\right)=0 \qquad (3).$$

După eliminarea numitorilor în relația (3) și ținând seama că $a\bar{a}=b\bar{b}=c\bar{c}=R^2$ efectuând calculele rezultă $a\bar{b}+\bar{a}b=a\bar{c}+\bar{a}c$ adică condiția de mai sus pentru ca $AB=AC$. Condiția este necesară și suficientă pentru ca CD și CE să fie perpendiculare.

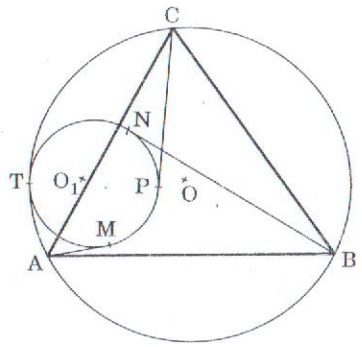
12. Se dau două cercuri tangente interior. În cercul mai mare se înscrie un triunghi echilateral, din ale cărui vârfuri se duc tangente la cercul mai mic. Dovediți că una din tangente este egală cu suma celorlalte două.

(Propusă pentru O.I.M.)

Soluție. Fie O centrul cercului mare și R raza sa, O_1 centrul cercului mic și r raza sa, T punctul de tangență al cercurilor și A, B, C vârfurile triunghiului echilateral. Alegem originea în O, iar ca axă reală dreapta OT.

Se știe că punctele O, O_1, T sunt coliniare; notăm măs $\overset{\frown}{TA}=x$. Atunci afixele lui A, B, C sunt:

$$Re^{ix},\ Re^{i(x+120^\circ)},\ Re^{i(x+240^\circ)} \qquad (1).$$



Afixele lui T și O_1 sunt R și $R-r$. Avem:

$$AM^2=AO_1^2-MO_1^2=(Re^{ix}-R+r)(Re^{-ix}-R+r)-r^2=R^2+(R-r)^2+$$
$$-R(R-r)(e^{ix}+e^{-ix})-r^2=2R(R-r)(1-\cos x) \qquad (2).$$

Analog

$$BN^2=BO_1^2-NO_1^2=(Re^{i(x-120^\circ)}-R+r)(Re^{-i(x-120^\circ)}-R+r)-r^2=$$
$$=2R(R-r)(1-\cos(x+120^\circ)) \qquad (3)$$

$$CP^2=CO_1^2-PO_1^2=(Re^{i(x+240^\circ)}-R+r)(Re^{-i(x+240^\circ)}-R+r)-r^2=$$
$$=2R(R-r)(1-\cos(x+240^\circ)) \qquad (4).$$

Dar:

$$1-\cos x=2\sin^2(x/2),\ 1-\cos(x+120^\circ)=2\sin^2\left(\frac{x+120^\circ}{2}\right)$$

$$1-\cos(x+240^\circ)=2\sin\left(\frac{x+240^\circ}{2}\right)$$

și înlocuind aceste relații în (2), (3) și (4) rămâne să studiem semnul funcției sinus pe intervalul $[0^\circ, 360^\circ]$.

Avem următorul tabel:

	0°			120°			240°			360°
$\sin\frac{x}{2}$	0	+	+	+	+	+	+	+	+	0
$\sin\frac{x+120^\circ}{2}$	+	+	+	+	+	0	−	−	−	
$\sin\frac{x+240^\circ}{2}$	+	+	+	0	−	−	−	−	−	

Avem:

$\sin\frac{x}{2}+\sin\frac{x+240^\circ}{2}=\sin\frac{x+120^\circ}{2}$ deci $AM+CP=BN$ pentru $x\in[0^\circ,120^\circ]$;

$\sin\frac{x+120^\circ}{2}-\sin\frac{x+240^\circ}{2}=\sin\frac{x}{2}$ deci $BN-CP=AM$ pentru $x\in[120^\circ,240^\circ]$.

$$\sin\frac{x}{2}-\sin\frac{x+120^\circ}{2}=2\sin(-30^\circ)\cos\left(\frac{x}{2}+30^\circ\right)=-\sin\left(\frac{x}{2}+120^\circ\right)=-\sin\frac{x+240^\circ}{2}$$

Deci $AM+BN=CP$ sau $AM+BN=CP$ pentru $x\in[240^\circ, 360^\circ]$.

Capitolul IV

INEGALITĂŢI GEOMETRICE DEDUSE DIN PROPRIETĂŢILE NUMERELOR COMPLEXE

Vom arăta cum se pot deduce multe din inegalităţile care există între elementele figurilor geometrice plecând de la relaţii care se pot stabili uşor în mulţimea numerelor complexe.

1. Fie A, B, C, M patru puncte în acelaşi plan şi a, b, c, z afixele lor corespunzătoare. Avem identitatea

$$(z-a)(b-c)+(z-b)(c-a)+(z-c)(a-b)=0, \tag{1}$$

de unde:

$$(z-a)(b-c)=-(z-b)(c-a)-(z-c)(a-b).$$

obţinem:

$$|(z-a)(b-c)|\le|(z-b)(c-a)|+|(z-c)(a-b)|$$

$$|(z-a)|\,|(b-c)|\le|z-b|\,|c-a|+|z-c|\,|a-b| \tag{2}.$$

Ţinând cont că $|z-a|=AM$, $|z-b|=BM$, $|z-c|=CM$ şi $|b-c|=BC$, $|c-a|=CA$, $|a-b|=AB$ obţinem următoarea teoremă:

Dacă A, B, C, M sunt patru puncte arbitrare în plan, avem relaţia lui Ptolemeu

$$AM\cdot BC\le BM\cdot CA+CM\cdot AB \tag{3}.$$

În particular, dacă triunghiul ABC este echilateral, adică

$$|a-c|=|b-c|=|c-a|$$

relaţia (2) devine

$$|z-a|\le|z-b|+|z-c| \tag{4}.$$

Deci am obţinut $MA\le MB+MC$, adică teorema lui Pompeiu:

Cu distanţele unui punct la vârfurile unui triunghi echilateral din acelaşi plan putem să formăm un triunghi.

Să considerăm ca origine centrul O al cercului circumscris al triunghiului ABC şi fie M ortocentrul triunghiului ABC. Afixul lui M în acest caz este $z=a+b+c$ şi relaţia (2) devine

$$|b+c|\,|b-c|\le|c+a|\,|c-a|+|a+b|\,|a-b| \tag{5}.$$

Dacă ţinem cont că afixele punctelor A_1, B_1, C_1 sunt $\frac{b+c}{2}$, $\frac{c+a}{2}$, $\frac{b+a}{2}$ atunci relaţia (5) devine

$$HA_1\cdot BC\le HB_1\cdot AC+HC_1\cdot AB \tag{6}$$

unde H şi M este ortocentrul triunghiului ABC.

Să considerăm ca origine centrul O al cercului circumscris al triunghiului ABC şi fie $M\equiv G$ centrul de greutate al triunghiului ABC. Afixul lui M în acest caz este $z=\frac{a+b+c}{3}$ şi relaţia (2) devine

$$|b+c-2a|\,|b-c|\le\left|\frac{a+c}{2}-b\right|\,|c-a|+\left|\frac{a+b}{2}-c\right|\,|a-b| \tag{7}.$$

Dacă ţinem cont că afixele punctelor A_1, B_1, C_1 sunt mijloacele laturilor BC, CA, AB adică $\frac{b+c}{2}$, $\frac{c+a}{2}$, $\frac{a+b}{2}$ atunci relaţia (7) devine

$$AA_1\cdot BC\le BB_1\cdot AC+CC_1\cdot AB$$

adică AA_1 BC, BB_1 AC, CC_1 AB pot fi laturile unui triunghi.

2. Dacă x, y, z sunt trei numere complexe, atunci

$$|x+y|+|y+z|+|z+x|\le|x|+|y|+|z|+|x+y+z| \tag{8}.$$

Soluţie. Dacă $z=0$, obţinem egalitate. Dacă $z\neq 0$, atunci împărţind cu z şi notând $u=\frac{x}{z}$, $v=\frac{y}{z}$ obţinem inegalitatea

$$|u+v|+|1+u|+|1+v|\le 1+|u|+|v|+|1+u+v| \tag{9}.$$

Ridicând la pătrat ultima relaţie şi ţinând cont că $a^2=a\cdot\bar{a}$ obţinem:

$$(u+v)(\bar{u}+\bar{v})+(1+u)(1+\bar{u})+(1+v)(1+\bar{v})+2|(u+v)(1+v)|+$$

$$+2|(u+v)(1+u)|+2|(1+u)(1+v)|\le(1+u+v)(1+\bar{u}+\bar{v})+$$

$$+2(1+|u|+|v|)\,|1+u+v|+(1+|u|+|v|)+(1+|u|+|v|).$$

Efectuând înmulţirile şi făcând reducerile posibile obţinem

$$|1+u+v+uv|+|u+v+v^2|+|y+v+u^2+uv|\le$$

$$|u|+|v|+|uv|+|1+u+v|+|1+u^2+uv|+|v+v^2+uv| \tag{10}.$$

Dar se observă că

$$|1+u+v+uv|\le|1+u+v|+|uv| \tag{11}$$

$$|u+v+v^2+uv|\le|u|+|v+v^2+uv| \tag{12}$$

$$|u+v+u^2+uv|\le|v|+|u+u^2+uv| \tag{13}.$$

Adunând (11), (12), (13) obţinem inegalitatea (9) şi deci rezultă că şi inegalitatea (8) este adevărată.

Propoziţie. Fie ABC un triunghi oarecare, G centrul de greutate şi M un punct din planul triunghiului. Fie A_1, B_1, C_1 mijloacele laturilor BC, CA, AB. Atunci avem inegalitatea:

$$MA+MB+MC+3MG\ge 2(MA_1+MB_1+MC_1) \tag{14}.$$

Soluţie. Alegem pe G ca origine a sistemului de coordonate din planul complex. Notăm cu a, b, c afixele vârfurilor A, B, C ale triunghiului şi cu x afixul punctului M din planul triunghiului. Punctele A_1, B_1, C_1, mijloacele segmentelor BC, CA, AB, vor avea afixele $\frac{b+c}{2}$, $\frac{a+c}{2}$, $\frac{b+a}{2}$.

Inegalitatea (14) devine în acest caz:

$$|x-a|+|x-b|+|x-c|+3|x| \le$$
$$\le 2\left(|x-\frac{a+b}{2}|+|x-\frac{b+c}{2}|+|x-\frac{a+c}{2}|\right) \quad (15).$$

Dacă notăm $x-a=u$, $x-b=v$, $x-c=z$, atunci din faptul că $a+b+c=0$ şi ţinând cont că afixul centrului de greutate al triunghiului este originea, inegalitatea (15) devine

$$|u+v|+|v+z|+|z+u| \le |u|+|v|+|z|+|u+v+z|$$

adică tocmai inegalitatea (8), care a fost demonstrată.

3. Să notăm $x=a-b$, $y=b-c$, $z=c-d$, atunci inegalitatea (8) devine

$$|a-b|+|b-c|+|c-d|+|d-a| \ge |a-c|+|b-d|+|a+c-b-d| \quad (16).$$

Fie $ABCD$ un poligon în plan şi să notăm cu a, b, c, d afixele punctelor A, B, C, D. Afixele mijloacelor M şi N ale segmentelor $|AC|$ şi $|BD|$ vor fi $\frac{a+c}{2}$, $\frac{b+d}{2}$. În acest caz inegalitatea (16) devine

$$AB+BC+CD+DA \ge AC+BD+2MN$$

Ridicând ultima inegalitate la pătrat, obţinem ţinând cont că

$$AB^2+BC^2+CD^2+DA^2=AC^2+BD^2+4MN^2 \quad (Euler)$$

relaţia:

$$AB\,BC+BC\,CD+CD\,DA+DA\,AB+BC\,DA+AB\,CD \ge$$
$$\ge AC\,BD+2\,AC\,MN+2\,BD\,MN.$$

Dacă patrulaterul $ABCD$ este inscriptibil, atunci ţinând cont de teorema lui Ptolemeu obţinem că

$$(AB+CD)(BC+AD) \ge 2\,MN(AC+BD) \quad (17).$$

Rezultă deci următoarea propoziţie:

Într-un patrulater inscriptibil există relaţia:

$$(AB+CD)(BC+AD) \ge 2MN\,(AC+BD)$$

unde M, N sunt mijloacele diagonalelor AC şi BD.

Dacă presupunem că patrulaterul $ABCD$ este inscriptibil şi circumscritibil atunci există următoarea propoziţie:

Într-un patrulater inscriptibil şi circumscriptibil există următoarea relaţie:

$$p^2 \ge 2m\,(d_1+d_2) \quad (18)$$

unde $m=MN$, $d_1=AC$, $d_2=BD$ şi p semiperimetrul patrulaterului.

4. Dacă M este un punct din planul triunghiului ABC atunci:

$$AM^2\sin A+BM^2\sin B+CM^2\sin C \ge 2S \quad (19).$$

Soluţie. Dacă $x, y, z \in \mathbf{C}$ avem identitatea:

$$x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)=(x-y)(z-x)(y-z) \quad (20)$$

de unde rezultă

$$|(x-y)(z-x)(y-z)|=|x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)|.$$

Aplicând inegalitatea modulului rezultă inegalitatea:

$$|(x-y)||z-x||y-z| \le |x^2||y-z|+|y^2||z-x|+|z^2|x-y| \quad (21).$$

Fie m afixul punctului M şi a, b, c afixele punctelor A, B, C. Înlocuind pe a, b, c în (21) şi simplificând prin $2R$ obţinem (19).

5. Fie M un punct din planul triunghiului ABC şi G centrul său de greutate, atunci avem inegalitatea:

$$AM^3\sin A+BM^3\sin B+CM^3\sin C \ge 6\,MGS.$$

Soluţie. Dacă $x, y, z \in \mathbf{C}$ atunci avem identitatea:

$$x^3(y-z)+y^3(z-x)+z^3(x-y)=(x-y)(y-z)(z-x)(x+y+z)$$

de unde rezultă

$$|x^3(y-z)|+|y^3(z-x)|+|z^3(x-y)| \ge |x-y||z-x||x+y+z||y-z| \quad (22).$$

Fie a, b, c, m afixele punctelor A, B, C respectiv M şi $x=m-a$, $y=m-b$, $z=m-c$.

Înlocuind x, y, z în inegalitatea (22) şi ţinând cont că afixul lui G este $\frac{a+b+c}{3}$, obţinem inegalitatea propusă.

6. Fie O_1, O_2 mijloacele diagonalelor AC şi BD ale unui patrulater $ABCD$ şi M intersecţia diagonalelor. Atunci

$$\sigma[ABCD] \ge 4\sigma[O_1MO_2].$$

Soluţie. Fie m, a, b, c, d afixele punctelor M, B, C, D. Exprimând diagonalele în funcţie de afixele vârfurilor, avem:

$$BD\cdot AC=(|m-a|+|m-c|)(|m-b|+|m-d|).$$

Ţinând cont de inegalitatea modulelor obţinem:

$$(|m-a|+|m-c|)(|m-b|+|m-d|) \ge 4\left|m-\frac{a+c}{2}\right|\left|m-\frac{b-d}{2}\right|$$

de unde deducem că

$$BD\,AC \ge 4\,MO_1\,MO_2.$$

Înmulţind relaţia cu $\sin\alpha$ (α fiind unghiul dintre diagonale) obţinem inegalitatea din enunţ.

7. Fie $ABCD$ un patrulater înscris într-un cerc de rază R şi fie r raza cercului circumscris triunghiului O_1MO_2. Să se arate că $R \ge 2r$.

Soluţie. Fie a, b, c, d, afixele vârfurilor A, B, C, D atunci

$$|a-b||b-c|c-a|+|c-d||d-a||a-c|=4RS_{ABCD}.$$

Ţinând cont de inegalitatea modulelor obţinem:

$$|c-a||(a-b)(b-c)-(c-d)(d-a)| \le 4RS_{ABCD}$$

de unde rezultă că

$$2|c-a|\,|d-b|\left|\frac{b+d}{2}-\frac{a+c}{2}\right|\le 4RS_{ABCD}$$

şi deci $ABCD\cdot O_1O_2\le 2RS_{ABCD}$.

Ţinând cont că $S_{ABCD}=\dfrac{AC\,BD\sin\alpha}{2}$ unde $\alpha=\sphericalangle O_1MO_2$ obţinem că $2r\le R$.

8. Fie M un punct în planul triunghiului ABC care are centrul de greutate G. Să se arate că

$$MA^3\cdot BC+MB^3\cdot AC+MC^3\cdot AB\ge 3MG\cdot AB\cdot BC\cdot CA.$$

(Marcel Chiriţă)

Soluţie. Fie a, b, c, m afixele punctelor A, B, C şi M. Centrul de greutate G va avea afixul $g=\dfrac{a+b+c}{3}$.

Dacă în egalitatea

$$x^3(y-z)+y^3(z-x)+z^3(x-y)=(x+y+z)(x-y)(y-z)(z-x)$$

aplicăm inegalitatea modulului, obţinem:

$$|x|^3|y-z|+|y|^3|z-x|+|z|^3|x-y|\ge|x+y+z|\,|x-y|\,|x-z|\,|y-z|$$

de unde, ţinând cont de faptul că putem avea originea sistemului de coordonate în punctul M, obţinem pentru $x=a$, $y=b$ şi $z=c$ inegalitatea cerută.

9. Fie un triunghi oarecare ABC şi M un punct arbitrar pe cercul circumscris triunghiului. Minimul şi maximul expresiei $MA^2+MB^2+MC^2$ se obţine când punctul M se află în extremităţile diametrului ce trece prin ortocentrul triunghiului ABC.

Soluţie. Alegem originea în O, centrul cercului circumscris triunghiului ABC. Notăm cu a, b, c, z, h afixele punctelor A, B, C, M, H (H fiind ortocentrul triunghiului). Avem $a\bar a=b\bar b=c\bar c=z\bar z=R^2$, R fiind raza cercului circumscris triunghiului ABC. De asemenea, $h=a+b=c$;

$$MA^2+MB^2+MC^2=(z-a)(\bar z-\bar a)+(z-b)(\bar z-\bar b)+(z-c)(\bar z-\bar c)=$$
$$=3z\bar z+a\bar a+b\bar b+c\bar c-(\bar a+\bar b+\bar c)z-(a+b+c)\bar z=6R^2-\bar h z-h\bar z \qquad (1).$$

Dar

$$|\bar h z+h\bar z|\le|\bar h z|+|h\bar z|=2|h|\,|z|=2R\cdot OH=\text{constant} \qquad (2).$$

Din (1) şi (2) rezultă:

$$6R^2-2R\cdot OH\le MA^2+MB^2+MC^2\le 6R^2+2R\,OH \qquad (3).$$

Pentru $z_1, z_2\in\mathbf{C}$ avem $|z_1+z_2|=|z_1|+|z_2|$ când $z_1=kz_2$, k real ≥ 0.

Deci în (2) avem egalitate când $\bar h z=kh\bar z$ sau, trecând la modul, avem $|\bar h|\,|z|=k|h|\,|z|$. Cum $|\bar h|=|h|$ şi $|\bar z|=|z|$, rezultă $k=1$ deci:

$$\bar h z=h\bar z \qquad (4).$$

Relaţia (4) arată că M este coliniar cu punctele O şi H; într-adevăr,

$$\begin{vmatrix}0&0&1\\ h&\bar h&1\\ z&\bar z&1\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow\bar h z=h\bar z.$$

Punctul diametral opus lui M are afixul $-z$ şi, în acest caz, există egalitatea (4) deci relaţia (3) este cu semnul egal când punctul M se află în extremităţile diametrului ce trece prin H.

10. Dacă M şi N sunt două puncte în interiorul triunghiului ABC, atunci:

$$aMA\cdot NA+bMB\cdot NB+cMC\cdot NC\ge abc \qquad (1).$$

În ce caz avem egalitate?

Soluţie. Să considerăm identitatea în $\mathbf{C}$:

$$\frac{z-z_1}{z_2-z_2}\cdot\frac{z'-z_1}{z_1-z_3}+\frac{z-z_2}{z_2-z_3}\cdot\frac{z'-z_2}{z_2-z_1}+\frac{z-z_3}{z_3-z_2}\cdot\frac{z'-z_3}{z_3-z_2}=1 \qquad (2).$$

Folosind inegalitatea triunghiului pentru numere complexe obţinem:

$$|z-z_1|\,|z'-z_1|\,|z_2-z_3|+|z-z_2|\,|z'-z_2|\,|z_1-z_3|+$$
$$+|z-z_3|\,|z'-z_2|\ge|z_1-z_2|\,|z_2-z_3|\,|z_3-z_1| \qquad (3)$$

cu egalitate dacă şi numai dacă toţi trei termenii ai membrului stâng ai inegalităţii (3) sunt numere reale.

Fie z_1, z_2, z_3, z, z' afixele punctelor A, B, C, M, N. Se deduce imediat că (1) este echivalent cu (3).

Cazul de egalitate se obţine dacă:

$$\sphericalangle BAM=\sphericalangle NAC;\ \sphericalangle ABM=\sphericalangle NBC;\ \sphericalangle BCM=\sphericalangle NCA.$$

Prin urmare punctele M şi N sunt izogonal conjugate (punctele M şi N situate pe două drepte izogonale).

Observaţii. Dacă $M=O$ (centrul cercului circumscris), atunci $N=H$ (ortocentrul).

Dacă $M=I$ (centrul cercului înscris), atunci $N=I$ şi obţinem în acest caz inegalitatea:

$$a\cdot AM^2+b\cdot BM^2+c\cdot CM^2\ge abc$$

cu egalitate pentru $M\equiv I$.

Capitolul V

INEGALITĂŢI CU NUMERE COMPLEXE

1. Teoremă: Dacă $x_1, x_2, ..., x_n$ sunt n numere complexe, atunci avem inegalitatea:

$$\left|\sum_{k=1}^{n} x_k\right| + (n-2)\sum_{k=1}^{n} |x_k| \geq \sum_{1\leq i\leq j\leq n} |x_i + x_j|.$$

Soluţie. Vom demonstra prin inducţie matematică. Pentru $n = 2$ avem egalitate. Presupunem adevărată pentru n şi trebuie să o demonstrăm pentru $n + 1$, adică să arătăm că:

$$|\sum_{k=1}^{n-1} x_k| + (n-1)\sum_{k=1}^{n-1} |x_k| \geq \sum_{1\leq i\leq j\leq n-1} |x_i + x_j|.$$

Avem:

$$|\sum_{k=1}^{n-1} x_k + x_n + x_{n-1}| + (n-2)\sum_{k=1}^{n-1} |x_k| + (n-2)|x_n + x_{n-1}| \geq$$

$$\geq \sum_{1\leq i\leq j\leq n-1} |x_i + x_j| + |x_1 + x_n + x_{n-1}| + |x_2 + x_n + x_{n-1}| + \ldots$$

$$+ |x_{n-1} + x_n + x_{n+1}| = \sum_{1\leq i\leq j\leq n-1} |x_i + x_j| + \sum_{k=1}^{n-1} |x_k + x_{n-1}|$$

$$\geq \sum_{1\leq i\leq j\leq n-1} |x_i + x_j| + \sum_{k=1}^{n-1} |x_k + x_n| + \sum_{k=1}^{n-1} |x_m + x_{n-1}| + \sum_{k=1}^{n-1} |x_n + x_{n-1}|$$

$$-\sum_{k=1}^{n-1} |x_k| - -\sum_{k=1}^{n-1} |x_n| - \sum_{k=1}^{n-1} |x_{n-1}| = \sum_{1\leq i\leq j\leq n+1} |x_i + x_j| - |x_n + x_{n-1}| + (n-1) \cdot$$

$$\cdot |x_n + x_{n-1}| - |x_1| - |x_2| - \ldots - |x_n| - |x_{n-1}| - (n-2)|x_n| - (n-2)|x_{n-1}|$$

deci:

$$|\sum_{k=1}^{n-1} x_k| + (n-2)\sum_{k=1}^{n-1} |x_k| + (n-2)|x_n + x_{n-1}| \geq \sum_{1\leq i\leq j\leq n-1} |x_i + x_j| +$$

$$+ (n-2)|x_n + x_{n-1}| - |x_1| - |x_2| - \ldots - |x_{n-1}| - (n-2)|x_n| - (n-2)|x_{n-1}|$$

sau:

$$|\sum_{k=1}^{n-1} x_k| + (n-2)\sum_{k=1}^{n} |x_k| + (n-2)|x_n| + (n-2)|x_{n-1}| + |x_1| + |x_2| + \ldots$$

$$+ |x_{n-1}| \geq \sum_{1\leq i\leq j\leq n-1} |x_i + x_j|$$

adică:

$$|\sum_{k=1}^{n-1} x_k| + (n-1)\sum_{k=1}^{n-1} |x_k| \geq \sum_{1\leq i\leq j\leq n-1} |x_i + x_j|.$$

(Demonstraţia şi generalizarea este a lui Mihai Bencze).

a) Fie $A_1A_2...A_n$ un poligon convex, G centrul său de greutate şi M un punct din planul poligonului. Fie A_{ij} mijloacele segmentelor A_iA_j $(i, j = 1, 2, ..., n$ şi $i \neq j)$. Atunci avem inegalitatea:

$$(n-2)\sum_{k=1}^{n} MA_k + nMG \geq 2\sum_{1\leq i\leq j\leq n} MA_{ij}.$$

Soluţie. Alegem pe G ca originea sistemului de coordonate din planul complex. Notăm cu a_k afixele vârfurilor $A_k(k = 1, 2, ..., n)$ ale poligonului şi cu x afixul punctului M din planul poligonului. Punctele A_{ij} mijloacele segmentelor A_iA_j, vor avea afixele:

$$\frac{1}{2}(a_i + a_j).$$

Având în vedere faptul că:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = 0$$

şi notând $x_k = x - a_k$, din (1, cap 2) rezultă inegalitatea:

$$(n-2)\sum_{k=1}^{n} |x - a_k| + n\left|x - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\right| \geq 2\sum_{1\leq i\leq j\leq n} \left|x - \frac{1}{2}(a_i + a_j)\right|,$$

de unde rezultă inegalitatea din enunţ.

b) Dacă avem $2n$ numere $r_k \geq 0$ şi $x_k \in \mathbf{R}$, $(k = 1, 2, ..., n)$ atunci avem inegalitatea:

$$\sqrt{r_k^2 + 2\sum_{1\leq i\leq j\leq n} r_i r_j \cos(x_i - x_j)} + (n-2)\sum_{k=1}^{k} r_k \geq$$

$$\geq \sum_{1\leq i\leq j\leq n} \sqrt{r_i^2 + r_j^2 + 2r_i r_j \cos(x_i - x_j)}.$$

Soluţie. În teorema dată înlocuim $z_k = r_k(\cos x_k + \sin x_k)$, $k = 1, 2, ..., n$. Pentru $r_k = 1$, $k = 1, 2, ..., n$ se obţine inegalitatea:

$$n(n-2) + \sqrt{n + 2\sum_{1\leq k\leq p\leq n} \cos(x_k - x_p)} \geq 2\sum_{1\leq k\leq p\leq n} \left|\cos\frac{x_k - x_p}{2}\right|.$$

Dacă $x_1, x_2, ..., x_n$ sunt rădăcinile de ordinul n ale unităţii, atunci ultima inegalitate devine:

$$\sum_{1\leq k\leq p\leq n} \left|\cos\frac{(k-p)}{n}\right| \leq \frac{1}{2}n(n-2).$$

c) Pentru $z_k = \cos(2k-1)x + i\sin(2k-1)x$, $k = 1, 2, \ldots, n$ obţinem inegalitatea:

$$\left|\frac{\sin nx}{\sin x}\right| + n(n-2) \geq 2\sum_{1\leq k\leq p\leq n} |\cos(k-p)x|, \text{ unde } x \neq \pi m, m \in \mathbf{Z}.$$

2. Dacă:

$$d(a,b) = \frac{|a-b|}{\sqrt{(1+|a|^2)(1+|b|^2)}} \tag{1}$$

atunci $d(a, b) \leq d(a, c) + d(c, b)$ unde a, b, c sunt trei numere complexe.

Soluţie. Plecăm de la identitatea:

$$(a-b)(1+c\bar{c}) = (a-c)(1+b\bar{c}) + (c-b)(1+a\bar{c}).$$

Rezultă că:

$$|a-b|(1+|c|^2) \leq |a-c|\,|1+b\bar{c}| + |c-b|\,|1+a\bar{c}| \tag{2}.$$

Aplicând inegalitatea $|\bar{u}-v|^2 \geq 0$ scrisă sub forma echivalentă:

$$(1+uv)(1+\bar{u}\bar{v}) \leq (1+|u|^2)(1+|v|^2), \quad \text{lui } |1+b\bar{c}|^2$$

obţinem:

$$|1+b\bar{c}|^2 = (1+b\bar{c})(1+c\bar{b}) \leq (1+|b|^2)(1+|\bar{c}|^2) = (1+|b^2|)(1+|c^2|) \tag{3}.$$

Deoarece:

$$|1+\bar{a}c|^2 \leq (1+|a|^2)(1+|c|^2) \tag{4}$$

inegalitatea (2) se reduce la (1) folosind (3) şi (4).

3. Dacă a şi b sunt numere complexe nenule, atunci:

$$|a+b| \leq \frac{1}{2}(|a|+|b|)\left|\frac{a}{|a|} + \frac{b}{|b|}\right|.$$

Egalitate avem dacă şi numai dacă $a = b$.

Soluţie. Fie $a = \gamma e^{i\theta}$, $b = +\rho e^{i\varphi}$ cu $\gamma, \rho > 0$.

Avem:

$$\frac{|a+b|}{|a|+|b|} = \left|\frac{\gamma}{\gamma+\rho}e^{i\theta} + \frac{\rho}{\gamma+\rho}e^{i\varphi}\right| = |u|$$

$$\frac{1}{2}\left|\frac{a}{|a|} + \frac{b}{|b|}\right| = \frac{e^{i\theta}+e^{i\varphi}}{2} = |v|.$$

În planul complex u se află pe coarda care uneşte punctele $e^{i\theta}$ şi $e^{i\varphi}$ pe cercul unitate, iar v se află în mijlocul acestei coarde. Deci $|u| \geq |v|$ cu egalitate dacă şi numai dacă $u = v$ adică $\gamma = \rho$.

4. Dacă n este un număr natural şi dacă x şi a sunt numere complexe astfel ca $|z| \leq r$ şi $|a| \leq r$, atunci:

$$\left|\frac{z^n - a^n}{z-a} - na^{n-1}\right| \leq \frac{1}{2}n(n-1)r^{n-2}|z-a| \quad (z \neq a).$$

Soluţie. Avem:

$$\frac{z^n - a^n}{z-a} - na^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} z^k a^{n-1-k} - na^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k}(z^k - a^k) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1}(z-a)a^{n-1-k}(a^{k-1} + za^{k-2} + \ldots + z^{k-1}).$$

Atunci:

$$\left|\frac{z^n - a^n}{z-a} - na^{n-1}\right| \leq |z-a|\sum_{k=0}^{n-1}|a|^{n-1-k}(|a|^{k-1} + |z|\,|a|^{k-2} + \ldots + |z|^{k-1}) \leq$$

$$\leq |z-a|\sum_{k=0}^{n-1} kr^{n-2} = \frac{1}{2}n(n-1)r^{n-2}|z-a|.$$

5. Se dau $n \geq 2$, $\varepsilon > 0$ şi numerele complexe $Z_1, \ldots, Z_n$ şi $a_1, \ldots, a_n$ atunci:

$$\sum_{k=1}^{n}|Z_k - a_k| < \varepsilon \Rightarrow |\prod_{k=1}^{n} Z_k - \prod_{k=1}^{n} a_k| \leq \varepsilon\sum_{k=0}^{n-1} S_k\varepsilon^{n-1-k}.$$

Demonstrăm prin inducţie: Pentru $n = 2$. Dacă $|Z_1 - a_1| + |Z_2 - a_2| < \varepsilon$, atunci

$$|Z_1Z_2 - a_1a_2| = |(Z_1-a_1)(Z_2-a_2) + a_1(Z_2-a_2) + a_2(Z_1-a_1)| \leq$$

$$\leq |Z_1-a_1|\,|Z_2-a_2| + |a_1|\,|Z_2-a_2| + |a_2|\,|Z_1-a_1| < \varepsilon(\varepsilon + |a_1| + |a_2|),$$

adică:

$$|Z_1-a_1| + |Z_2-a_2| < \varepsilon \Rightarrow |Z_1Z_2 - a_1a_2| < \varepsilon(\varepsilon + |a_1| + |a_2|) \tag{1}.$$

Să presupunem afirmaţia adevărată pentru $n \geq 2$. Vom arăta că rămâne adevărată şi pentru $n+1$. Să presupunem că:

$$\sum_{k=1}^{n}|Z_k - a_k| < \varepsilon.$$

Folosim identitatea:

$$\prod_{k=1}^{n+1} Z_k - \prod_{k=1}^{n+1} a_k = \left(\prod_{k=1}^{n} Z_k - \prod_{k=1}^{n} a_k\right)\left((Z_{n+1} - a_{n+1}) + a_{n+1}\right) + \left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)(Z_{n+1} - a_{n+1}).$$

Rezultă deci din presupunerea de inducţie că:

$$|\prod_{k=1}^{n+1} Z_k - \prod_{k=1}^{n+1} a_k| < (\varepsilon + |a_{n+1}|)\sum_{k=0}^{n-1} S_k\varepsilon^{n-k} + \varepsilon|a_{n+1}| \cdot S_n =$$

$$= \varepsilon^{n+1} + \varepsilon\sum_{k=1}^{n}(S_k + |a_{n+1}|S_{k-1})\varepsilon^{n-k} = \varepsilon\sum_{k=0}^{n} S_k\varepsilon^{n-k}$$

unde S_k este a k – a funcţie simetrică de $|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{n+1}|$.

6. Dacă $a_1, \ldots, a_n$ sunt numere reale şi $Z_1, \ldots, Z_n$ numere complexe, atunci:

$$|\sum_{k=1}^{n} a_kZ_k|^2 \leq \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n}|Z_k|^2 + |\sum_{k=1}^{n} Z_k^2|\right).$$

Egalitatea are loc dacă şi numai dacă, pentru $k = 1, 2, \ldots, n$, $a_k = R_e(\lambda Z_k)$, unde λ este un număr complex şi $\sum_{k=1}^{n} \lambda^2 Z_k^2$ este real nenegativ.

Soluţie. Putem roti simultan numerele Z_k astfel ca:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k Z_k \geq 0 .$$

Această rotaţie nu afectează modulele:

$$|\sum_{k=1}^{n} a_k Z_k| , \quad |\sum_{k=1}^{n} Z_k^2| , \quad |Z_k| \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

De aceea este suficient să demonstrăm inegalitatea în cazul:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k Z_k \geq 0 .$$

Dacă luăm $Z_k = x_k + iy_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$, atunci:

$$|\sum_{k=1}^{n} a_k Z_k|^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k x_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right).$$

Deoarece:

$$2x_k^2 = |x_k|^2 + R_e Z_k^2 ,$$

obţinem:

$$|\sum_{k=1}^{n} a_k Z_k|^2 \leq \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} |Z_k|^2 + \sum_{k=1}^{n} Re\, Z_k^2\right).$$

Din această inegalitate rezultă (1) dacă ţinem cont că:

$$\sum_{k=1}^{n} Re\left(Z_k^2\right) = R_e\left(\sum_{k=1}^{n} Z_k^2\right) \leq \left|\sum_{k=1}^{n} Z_k^2\right| .$$

7. Dacă $0 < a < 1$ şi (1) $b = \frac{1}{a}(e^{-a}/(1-a) - 1)$ atunci pentru orice număr complex cu $|z| \leq a$, avem:

$$|e^z| \leq |1 + z|(1 + b|z|) \qquad (2).$$

Soluţie. Fie $z = x + iy$, $|z| = \rho$, $\rho \in (0, 1)$. Avem:

$$\left|\frac{e^z}{1+z}\right|^2 = \frac{e^{2x}}{1 + \rho^2 + 2x} = f(x), \qquad (-\rho < x < \rho).$$

Deoarece:

$$f'(x) < 0, (2x < -\rho^2), \quad f'(x) > 0, (2x > -\rho^2)$$

şi

$$\frac{e^{-\rho}}{e - \rho} > \frac{e^{\rho}}{1 + \rho} \qquad (0 < \rho < 1)$$

avem:

$$\max_{|z| = \rho} \left|\frac{e^z}{1+z}\right| = \frac{e^{-\rho}}{1 - \rho} = g(\rho), \qquad (0 < \rho < 1) \qquad (3).$$

Din faptul că $g(\rho)$ este convexă în $(0, 1)$ şi $g(0) = 1$, $g'(0) = 0$, deducem că $g(\rho) \leq 1 + b\rho$, $(0 < \rho \leq a)$ unde b este dat de (1). Inegalitatea (2) este o consecinţă a lui (3).

8. Fie a şi c numere pozitive şi b un număr complex astfel ca:

$$f(z) = az\bar{z} + bz + \bar{b}\bar{z} + c \geq 0$$

pentru orice număr complex. Atunci:

$$b\bar{b} \leq ac , \qquad (1)$$

$$f(z) \leq (a + c)(1 + z\bar{z}) \qquad (2)$$

cu egalitate în (1) când $f(z) = 0$ oricare ar fi z.

Soluţie. Fie $z = \gamma e^{i\theta}$ şi $b = \rho e^{it}$, unde γ şi ρ sunt pozitive sau zero, iar θ şi t sunt reale. Atunci prin ipoteză:

$$f(z) = a\gamma^2 + 2\gamma\rho\cos(\theta + t) + c \geq 0 \qquad (3)$$

$$f(z) \geq a\gamma^2 - 2\gamma\rho + C \geq 0 \qquad (4)$$

pentru orice valori ale lui γ şi θ, cu o egalitate în (4) numai dacă

$$\cos(\theta + t) = -1.$$

Din (4) rezultă $\rho^2 - ac \leq 0$, cu egalitate dacă şi numai dacă pentru $z = z_0$.

$$f(z_0) = a\gamma_0^2 - 2\gamma\rho_0 + c = 0$$

unde $|z_0| = \gamma_0$. Astfel (1) este demonstrată.

Din $\rho^2 - ac \leq 0$ rezultă că:

$$\rho\gamma \leq \gamma\sqrt{ac} = \gamma\sqrt{ac^2} \leq \frac{1}{2}(a + c\gamma^2) \qquad (5).$$

Din (3) şi (5) rezultă că:

$$f(z) \leq a\gamma^2 + 2\rho\gamma + c \leq (a\gamma^2 + c) + (a + c\gamma^2) = (a + c)(\gamma^2 + 1)$$

şi (2) este demonstrată.

9. Dacă z şi w sunt numere complexe şi $\lambda \geq 2$, atunci:

$$2(z^\lambda + w^\lambda) \leq |z + w|^\lambda + |z - w|^\lambda \qquad (1).$$

Soluţie. Fără a micşora generalitatea putem presupune că $|z| \geq |w|$, astfel ca $w = z\gamma e^{i\varphi}$ $(0 \leq \gamma \leq 1$; φ real). Acum (1) poate fi scrisă:

$$2(1 + \gamma^\lambda) \leq |1 + \gamma e^{i\varphi}|^\lambda + |1 - \gamma e^{i\varphi}|^\lambda = f(\gamma, \varphi, \lambda) \qquad (2)$$

unde:

$$f(\gamma, \varphi, \lambda) = (1 + \gamma^2 + 2\gamma\cos\varphi)^{\frac{\lambda}{2}} + (1 + \gamma^2 - 2\gamma\cos\varphi)^{\frac{\lambda}{2}}.$$

Dar $\min_{\varphi} f(\gamma, \varphi, \lambda) = 2(1 + \gamma^2)^{\frac{\lambda}{2}}$ astfel că inegalitatea (1) rezultă dacă:

$$1 + \gamma^\lambda \leq (1 + \gamma^2)^{\frac{\lambda}{2}} \qquad (3).$$

Ultima egalitate este adevărată dacă:

$$1 + \frac{\lambda}{2}\gamma^2 \leq (1 + \gamma^2)^{\frac{\lambda}{2}} \text{ şi } 1 + \gamma^\lambda \leq 1 + \frac{\lambda}{2}\gamma^2.$$

Deoarece aceste două inegalităţi sunt adevărate pentru $0 \leq \gamma \leq 1$ şi $\lambda \geq 2$, inegalitatea (1) este demonstrată.

10. Fie Z_1 şi Z_2 două numere complexe şi fie a şi b două numere reale astfel ca $a \neq 0$, $b \neq 0$ şi $a + b \neq 0$. Atunci:

$$\frac{|Z_1 + Z_2|^2}{a+b} \geq \frac{|Z_1|^2}{a} + \frac{|Z_2|^2}{b} \text{ pentru } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} < 0$$

şi

$$\frac{|Z_1 + Z_2|^2}{a+b} \leq \frac{|Z_1|^2}{a} + \frac{|Z_2|^2}{b} \text{ pentru } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} > 0.$$

Egalitatea are loc numai dacă $bZ_1 = aZ_2$.

Soluţie. Inegalităţile din enunţ rezultă din egalitatea:

$$\frac{|Z_1|^2}{a} + \frac{|Z_2|^2}{b} - \frac{|Z_1 + Z_2|^2}{a+b} = \frac{|bZ_1 - aZ_2|^2}{ab(a+b)}.$$

11. Dacă $Z_1, \ldots, Z_2$ sunt numere complexe, atunci:

a) $1 \leq |1 + Z_1| + |Z_1 + Z_2| + |Z_2 + Z_3| + |Z_3|$

b) $|1 + Z_1| + |Z_1 + 2Z_2| + |2Z_2 + 3Z_3| + \ldots + |(n-1)Z_{N-1} + nZ_n| +$

$+ |nZ_n| \geq 1.$

Soluţie. a) Avem:

$1 = |(1 + Z_1) - (Z_1 + Z_2) - (Z_2 + Z_3) - Z_3| \leq |1 + Z_1| + |Z_1 + Z_2| + |Z_2 + Z_3| + |Z_3|.$

b) Similar putem scrie:

$1 = |(1 + Z_1) - (Z_1 + 2Z_3) + (2Z_2 + 3Z_2) + \ldots + (-1)^{n-1}|(n-1)Z_{n-1} + nZ_n|$

$+ (-1)^n Z_n| \leq |1 + nZ_1| + |Z_1 + 2Z_2| + \ldots + |(n-1)Z_{N-1} + nZ_n| + |nZ_n|.$

12. Dacă $z_1, \ldots, z_n$ sunt numere complexe, atunci există o submulţime I a lui $\{1, 2, \ldots, m\}$ astfel ca:

$$|\sum_{k \in I} z_k| \geq \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{m} |z_k| \qquad (1).$$

Soluţie. Pentru x real notăm $x^+ = \max(x, 0)$. Fie:

$$z_k = \gamma_k(\cos\theta_k + i \sin\theta_k),\ \gamma_k = |z_k|\ (0 \leq \theta_k \leq 2\pi).$$

Definim:

$$f(\theta) = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k(\cos(\theta - \theta_k))^+.$$

Avem:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\,d\theta = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{m}\gamma_k \int_0^{2\pi}(\cos(\theta - \theta_k))^+\,d\theta =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{m}\gamma_k \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\,d\theta = \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{m}\gamma_k.$$

Prin urmare, există un număr θ astfel ca:

$$f(\theta) \geq \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{m}|z_k| \qquad (2).$$

Dacă $I = \{k \mid 1 \leq k \leq m, \cos(\theta - \theta_k) > 0\}$ atunci:

$$|\sum_{k \in I} z_k| = e^{-i\theta}\sum_{k \in I} z_k > Re\sum_{k \in I} e^{-i\theta}z_k = \sum_{k \in I}\gamma_k\cos(\theta - \theta_k) =$$

$$= \sum_{k=1}^{m}\gamma_k(\cos(\theta - \theta_k))^+ = f(\theta);$$

astfel (2) implică (1).

Capitolul VI

GEOMETRIA TRIUNGHIULUI

Fie un triunghi ABC în care notăm cu O centrul cercului circumscris, H ortocentrul, G centrul de greutate. Fie A_1, A_2, A_3 picioarele înălțimilor, $A_2B_2C_2$ mijloacele laturilor și D, E, F mijloacele segmentelor $|AH|$, $|BH|$, $|CH|$.

Considerăm punctul O originea și notăm cu litere mici corespunzătoare afixele punctelor considerate. Dacă considerăm raza cercului circumscris egală cu unitatea, atunci ecuația cercului circumscris triunghiului ABC se scrie $Z\bar{Z} = 1$ și rezultă imediat că:

$$a \cdot \bar{a} = b \cdot \bar{b} = c \cdot \bar{c} = 1 \tag{1}$$

Fie punctul O_1 simetricul punctului O față de BC. Atunci afixul punctului O_1 este $o_1 = a + b$. Segmentul $|OH|$ este diagonala paralelogramului de laturi $|OA|$ și $|OO_1|$, și rezultă deci că afixul ortocentrului H este $h = a + b + c$.

Punctul A_2 mijlocul segmentului $|BC|$ are afixul:

$$a_2 = \frac{b+c}{2},$$

iar mijlocul D al segmentului $|AH|$ are afixul:

$$d = a + \frac{b+c}{2},$$

deci afixul mijlocului Ω al segmentului $|A_2D|$ este:

$$\omega = \frac{a+b+c}{2} \tag{2}$$

Expresia (2) fiind simetrică în a, b, c rezultă că mijloacele segmentelor $|DA_2|$, $|EB_2|$, $|FC_2|$ coincid cu mijlocul segmentului $|OR|$. Deducem că există un cerc cu centrul în Ω și care trece prin punctele D, E, F, A_2, B_2, C_2.

Ecuația dreptei BC se scrie:

$$\begin{vmatrix} z & \bar{z} & 1 \\ b & \bar{b} & 1 \\ c & \bar{c} & 1 \end{vmatrix} = 0 \tag{3}$$

sau, după efectuarea calculelor, $z + bc\bar{z} - b - c = 0$.

Ecuația înălțimii din A este deci:

$$z - a = bc(\bar{z} - \bar{a}) \tag{4}$$

Eliminând pe z din (3) și (4), obținem că piciorul înălțimii din A, A_1 are afixul:

$$a_1 = \frac{a + b + c - \bar{a}bc}{2} \tag{5}$$

Deoarece:

$$A_1\Omega = |a_1 - \omega| = \left|\frac{\bar{a}bc}{2}\right| = \frac{1}{2} \text{ și } A_2\Omega = |a_2 - \omega| = \left|\frac{a}{2}\right| = \frac{1}{2}$$

rezultă imediat că:

$$A_1\Omega = A_2\Omega = \frac{1}{2}$$

și apoi, în mod asemănător, găsim că:

$$\|B_1\Omega\| = \|B_2\Omega\| = \|C_1\Omega\| = \|C_2\Omega\| = \frac{1}{2}.$$

Regăsim în final următoarea teoremă atribuită lui Euler (cercul celor 9 puncte):

> *"Mijloacele laturilor unui triunghi, picioarele înălțimilor, mijloacele segmentelor dintre vârfuri și ortocentru sunt 9 puncte situate pe un cerc, cu centrul în mijlocul segmentului OH și cu raza egală cu jumătate din raza cercului circumscris".*

Centrul de greutate G are afixul:

$$g = \frac{a+b+c}{3} \tag{6}$$

deci comparând relațiile (2), (3) și (6) obținem imediat că punctele H, Ω, G, O sunt patru puncte coliniare și că:

$$\boldsymbol{HO} = 2 \cdot \boldsymbol{H\Omega}\,,\ \boldsymbol{GO} = 2 \cdot \boldsymbol{G\Omega} \tag{7}$$

adică următoarea teoremă:

> *"Centrul cercului circumscris, centrul de greutate, centrul cercului lui Euler și ortocentrul, unui triunghi formează o diviziune armonică". Dreapta pe care se află aceste puncte se mai numește și dreapta lui Euler.*

Fie un punct M în interiorul triunghiului ABC. Să considerăm simetricele M_1, M_2, M_3 ale punctului M față de mijloacele A_2, B_2, C_2 al segmentelor $|BC|$, $|CA|$, $|AB|$. Punctul M_1 are afixul $m_1 = b + c - m$.

Ecuația dreptei AM_1 este:

$$\begin{vmatrix} z & \bar{z} & 1 \\ a & \bar{a} & 1 \\ b+c-m & \bar{b}+\bar{c}-\bar{m} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

sau

$$z(2\bar{a} - \bar{\sigma}_1 + \bar{m}) - \bar{z}(2a - \sigma_1 + m) + a(\bar{\sigma}_1 - \bar{m}_1) - \bar{a}(\sigma_1 - m) = 0$$

unde am notat cu $\sigma_1 = a + b + c$. În mod analog putem scrie ecuația dreptei BM_2:

$$z(\overline{2b} - \bar{\sigma}_1 + \bar{m}) - \bar{z}(2a - \sigma_1 + m) + b(\bar{\sigma}_1 - \bar{m}) - \bar{b}(\sigma_1 - m) = 0.$$

Eliminând pe $\bar{z}$ între cele două expresii se obține:

$$z = \frac{a+b+c-m}{2},$$

o expresie simetrică în a, b, c de unde putem trage imediat concluzia că dreptele AM_1, BM_2 și CM_3 sunt concurente în punctul N de afix:

$$n = \frac{a+b+c-m}{2}.$$

Rezultă imediat că:

$$MG = 2 \cdot GN.$$

Putem enunța deci următoarea teoremă:

Dreptele care unesc simetricele unui punct M din interiorul unui triunghi față de mijloacele laturilor, cu vârfurile opuse laturilor sunt concurente într-un punct N pentru care $MG = 2 \cdot GN$.

Fie A' punctul diametral opus lui A, atunci afixul punctului A' este $a' = -a$. Dreapta are ecuația:

$$\begin{vmatrix} z & \bar{z} & 1 \\ -a & -\bar{a} & 1 \\ \frac{a+\sigma_1}{2} & \frac{\bar{a}+\bar{\sigma}_1}{2} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

sau:

$$z(3\bar{a}+\bar{\sigma}_1) - z(3a+\sigma_1) + a \cdot \bar{\sigma}_1 - \bar{a} \cdot \bar{\sigma}_1 = 0.$$

În mod analog, putem scrie ecuațiile dreptelor $B'E$ și $C'F$. Dacă eliminam pe z din ecuațiile dreptelor $A'D$ și $B'E$ găsim că:

$$z = \frac{a+b+c}{3},$$

o expresie simetrică în a, b, c și care reprezintă afixul centrului de greutate G al triunghiului. Rezultă deci următoarea teoremă:

Dreptele care unesc mijloacele segmentelor $|AH|$, $|BH|$, $|CH|$ cu punctele diametral opuse în cercul cercului circumscris ale lui A, B, C determină trei drepte concurente în centrul de greutate al triunghiului.

Dacă considerăm dreapta care trece prin punctele A și B de afixe z_1 și z_2, simetricul P de afix p, al punctului Q de afix q, față de dreapta care trece prin A și B este:

$$p = \frac{z_1\bar{z}_2 - z_2\bar{z}_1 + \bar{q}(z_2 - z_1)}{\bar{z}_2 - \bar{z}_1}.$$

Să calculăm afixul punctului P care este simetricul cercului circumscris față de dreapta care trece prin punctele B_2 și C_2.

Rezultă că:

$$p = \frac{(a+b)(a+c)}{2a}.$$

Ecuația cercului lui Euler este:

$$\left(Z - \frac{\sigma_1}{2}\right)\left(\bar{Z} - \frac{\bar{\sigma}_1}{2}\right) = \frac{1}{4}.$$

Înlocuind afixul punctului P în ecuația cercului lui Euler obținem:

$$\left(\frac{(a+b)(a+c)}{2a} - \frac{a+b+c}{2}\right)\left(\frac{(\bar{a}+\bar{b})(\bar{a}+\bar{c})}{2a} - \frac{\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

și, după efectuarea calculelor, obținem $\frac{1}{4} = \frac{1}{4}$, de unde rezultă că punctul P se află pe cercul lui Euler. Rezultă că putem enunța următoarea teoremă:

Simetricele centrului cercului circumscris față de mijloacele laturilor unui triunghi (triunghiul median sau complementar) se găsesc pe cercul lui Euler.

2. Într-un patrulater inscriptibil în care una din diagonale este un diametru, cele două triunghiuri ale patrulaterului care au cealaltă diagonală ca latură comună, au cercurile celor nouă puncte tangente.

(*C. Mihalescu. Geometria elementelor remarcabile*, pag. 23)

Soluție. Fie $ABCD$ patrulater inscriptibil deci înscris în cercul (O). Fie a, b, c, d afixele lui A, B, C, D și raza cercului $(O) = 1$. Avem AC = diametru deci $\frac{a+b}{2} = 0$ deci $a = -c$. Cercul lui Euler al triunghiului ABD are centrul de afix egal cu $\frac{a+b+d}{2}$ și rază $\frac{1}{2}$ și cercul lui Euler al triungiului BCD are centrul de afix $\frac{b+c+d}{2}$ și rază $\frac{1}{2}$.

Pentru a arăta că aceste cercuri sunt tangente, este suficient a arăta că (necesar și suficient) distanța dintre centre este egală cu suma razelor lor sau:

$$\left|\frac{a+b+d}{2} - \frac{b+c+d}{2}\right| = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \text{ sau } \left|\frac{a-c}{2}\right| = 1;$$

dar $-c = a$ deci $\left|\frac{a+a}{2}\right| = 1$, care este evident. Aceleași calcule se fac pentru un cerc cu o rază R oarecare.

Soluție geometrică. Fie patrulaterul $ABCD$ înscris în cercul (O), în care diagonala AC este diametru. Tangenta în A', mijlocul lui BD, la cercul celor nouă puncte al triunghiului ABD, este paralelă cu tangenta AT_1 în vârful A la cercul circumscris (O).

Și tangenta în același punct A' la cercul celor nouă puncte al triunghiului CDB este paralelă cu tangenta CT_2 în vârful C la același cerc (O). Cum tangentele AT_1 și CT_2 sunt paralele, pentru că punctele de tangență sunt extremitățile unui diametru, rezultă că tangentele duse cercurilor celor nouă puncte(O_9) și (O_9'') prin același punct A' se confundă. Deci, cercurile celor nouă puncte ale triunghiurilor ABD și CBD sunt tangente.

3. Paralelele duse prin vârfurile A, B, C la laturile opuse ale unui triunghi întâlnesc cercul circumscris triunghiului în A', B', C'. Să se arate că mediatoarele triunghiului $A'B'C'$ trec prin vârfurile triunghiului ABC.

(Probleme de geometrie de Gh.Ţiţeica, ediţia a VI–a)

Fie originea axelor în O centrul cercului circumscris triunghiului ABC fie a, b, c afixele lui A, B, C şi raza cercului 1.

Avem:

$$a \cdot \bar{a} = b \cdot \bar{b} = c \cdot \bar{c} = 1 .$$

Ecuaţia dreptei (BC) este:

$$z(\bar{b} - \bar{c}) - \bar{z}(b - c) = b\bar{c} - \bar{b}c$$

sau

$$z\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right) - \bar{z}(b - c) = -\frac{b}{c} + \frac{c}{b}$$

sau

$$z\left(\frac{c - b}{bc}\right) - \bar{z}(b - c) = \frac{c^2 - b^2}{bc}$$

sau, împărţind cu $c - b \neq 0$, obţinem:

$$z + bc\bar{z} = b + c \qquad (1)$$

care este ecuaţia dreptei (BC).

Ecuaţia dreptei paralele cu (BC) care trece prin a este:

$$z - a = -bc(\bar{z} - \bar{a});$$

ca să obţinem afixul lui A' facem $\bar{z} = \frac{1}{z}$ deci:

$$z - a = -bc\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{a}\right) \text{ sau } z - a = \frac{bc(z - a)}{az}.$$

Împărţim cu $z - a \neq 0$ şi obţinem $z = \frac{bc}{a}$ afixul lui A', analog, afixele lui B' şi C' sunt:

$$\frac{ac}{b} \text{ şi } \frac{ab}{c}.$$

Ecuaţia mediatoarei lui $(B'C')$ este:

$$z - \left(\frac{ac}{b} + \frac{ab}{c}\right)\frac{1}{2} = \frac{ac}{b} \cdot \frac{ab}{c} \cdot \left(\bar{z} - \frac{1}{2}\left(\frac{\bar{a}\bar{c}}{\bar{b}} + \frac{\bar{a}\bar{b}}{\bar{c}}\right)\right)$$

Să verificăm că pentru $z = a$ se obţine o identitate. Adică:

$$a - \left(\frac{ac}{b} + \frac{ab}{c}\right)\frac{1}{2} = a^2\left[\frac{1}{a} - \frac{1}{2}\left(\frac{c}{ab} + \frac{b}{ca}\right)\right] =$$

$$= a^2\frac{1}{a} - \frac{1}{2}a\left(\frac{c}{b} + \frac{b}{c}\right) = a - \frac{1}{2}a\left(\frac{c}{b} + \frac{b}{c}\right)$$

deci se verifică.

În mod analog se verifică pentru celelalte.

4. Fie un triunghi ABC şi punctul M situat pe cercul circumscris triunghiului ABC. Demonstraţi că triunghiul format de centrele cercurilor lui Euler corespunzătoare triunghiurilor MAB, MBC, MCA este asemenea cu triunghiul ABC şi să se afle raportul de asemănare.

(Marian Dincă, G.M.B. nr.7/1976)

Fie a, b, c, z afixele punctelor A, B, C, M şi Ω_1, Ω_2, Ω_3 centrele cercurilor Euler ale triunghiurilor MAB, MBC, MCA.

Se ştie că afixele ω_1, ω_2, ω_3 ale punctelor Ω_1, Ω_2, Ω_3 sunt:

$$\omega_1 = \frac{z + a + b}{2}, \quad \omega_2 = \frac{z + b + c}{2}, \quad \omega_3 = \frac{z + c + a}{2}$$

$$|\omega_1 - \omega_2| = \left|\frac{z + a + b}{2} - \frac{z + b + c}{2}\right| = \left|\frac{a - c}{2}\right| \text{ deci } \|\Omega_2\Omega_1\| = \frac{1}{2}\|CA\|$$

$$|\omega_2 - \omega_3| = \left|\frac{z + b + c}{2} - \frac{z + c + a}{2}\right| = \left|\frac{b - a}{2}\right| \text{ deci } \|\Omega_3\Omega_2\| = \frac{1}{2}\|AB\|$$

$$|\omega_3 - \omega_1| = \left|\frac{z + c + a}{2} - \frac{z + a + b}{2}\right| = \left|\frac{c - b}{2}\right| \text{ deci } \|\Omega_1\Omega_3\| = \frac{1}{2}\|BC\|.$$

Rezultă că:

$$\frac{\|\Omega_2\Omega_1\|}{\|CA\|} = \frac{\|\Omega_2\Omega_3\|}{\|AB\|} = \frac{\|\Omega_1\Omega_3\|}{\|BC\|} = \frac{1}{2}.$$

Deci $\Delta\Omega_1\Omega_2\Omega_3 \sim \Delta ABC$ şi raportul de asemănare este $\frac{1}{2}$.

5. Pe laturile triunghiului ABC se construiesc în exterior pătratele $BCMN$, $CAPQ$, $ABRS$. Fie X, Y, Z proiecţiile centrului cercului circumscris O al triunghiului ABC pe MN, PQ, RS. Să se arate că:

$$\overrightarrow{AX} + \overrightarrow{BY} + \overrightarrow{CZ} = 0 .$$

Fie O originea şi a, b, c afixele punctelor A, B, C. Deci:

$$a \cdot \bar{a} = b \cdot \bar{b} = c \cdot \bar{c} = 1,$$

deoarece alegem raza cercului ca unitate.

Atunci deoarece $\overrightarrow{AX} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{MX}$ rezultă că:

$$\overrightarrow{AX} = b - a - i(c - b) + \frac{1}{2}(c - b).$$

Analog determinăm din $\overrightarrow{BY} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PY}$ că:

$$\overrightarrow{BY} = c - b - i(a - c) + \frac{1}{2}(a - c)$$

şi din $\overrightarrow{CZ} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BR} + \overrightarrow{RZ}$ că:

$$\overrightarrow{CZ} = a - c - i(b-a) + \frac{1}{2}(b-a).$$

Adunând cele trei relaţii obţinem imediat că:

$$\overrightarrow{AX} + \overrightarrow{BY} + \overrightarrow{CZ} = 0.$$

6. În interiorul poligonului regulat $A_1A_2 \ldots A_n$ $(n \geq 3)$ se consideră punctele M şi N. Fie $M_1, N_1, M_2, N_2, \ldots, M_n, N_n$ proiecţiile punctelor M şi N pe laturile $|A_1A_2|, |A_2A_3|, \ldots, |A_nA_1|$ ale poligonului dat. Să se arate că:

$$\overrightarrow{M_1N_1} + \overrightarrow{M_2N_2} + \ldots + \overrightarrow{M_nN_n} = \frac{n}{2} \cdot \overrightarrow{MN}.$$

Fie $A_1A_2 \ldots A_n$ un poligon regulat înscris într-un cerc de rază unitate şi alegem centrul poligonului ca origine. Afixele vârfurilor poligonului vor fi ε, $\varepsilon^2, \ldots, \varepsilon^n$ unde:

$$(\varepsilon^i)^n = 1 \text{ şi } \varepsilon^i \cdot \bar{\varepsilon}^i = 1, \quad (\forall) i = 1, 2, \ldots, n$$

(ε este o rădăcină complexă a unităţii). Fie a şi b afixele punctelor M şi N iar a_k şi b_k afixele punctelor M_k şi N_k, $k = 1, 2, \ldots, n$. Rezultă deci că putem scrie $\overrightarrow{MN} = b - a$ şi $\overrightarrow{M_kN_k} = b_k - a_k$, $(\forall)\, k = 1, 2, \ldots, n$. Să scriem ecuaţia dreptei care trece prin A_k şi A_{k+1}. Avem deci:

$$\begin{vmatrix} Z & \bar{Z} & 1 \\ \varepsilon^k & \bar{\varepsilon}^k & 1 \\ \varepsilon^{k-1} & \bar{\varepsilon}^{k-1} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

de unde obţinem:

$$Z + \bar{Z}\varepsilon^{2k-1} - \varepsilon^k(1+\varepsilon) = 0.$$

Punctul M_k proiecţia lui M pe A_kA_{k+1} va avea afixul:

$$a_k = \frac{1}{2}\left[a - \varepsilon^{2k-1} \cdot \bar{a} + (1+\varepsilon)\varepsilon^k\right]$$

iar N_k proiecţia lui N pe A_kA_{k+1} va avea afixul:

$$b_k = \frac{1}{2}\left[b - \varepsilon^{2k-1} \cdot \bar{b} + (1+\varepsilon)\varepsilon^k\right];$$

rezultă deci că:

$$\overrightarrow{M_kN_k} = b_k - a_k = \frac{1}{2}\left[b - a - (\bar{b} - \bar{a})\varepsilon^{2k-1}\right].$$

Putem deci să scriem că:

$$\sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{M_kN_k} = \sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k) = \frac{n}{2}(b-a) - \frac{1}{2}(\bar{b} - \bar{a}) \sum_{k=1}^{n} \varepsilon^{2k-1} =$$

$$= \frac{n}{2}(b-a) = \frac{n}{2}\overrightarrow{MN},$$

deoarece $\sum_{k=1}^{n} \varepsilon^{2k-1} = 0$ c.c.t.d..

Generalizări ale teoremei lui Dimitrie Pompeiu

Vom demonstra următoarele teoreme:

1. Dacă $A_1A_2 \ldots A_n$ şi $B_1B_2 \ldots B_n$ sunt două poligoane regulate în acelaşi plan şi la fel orientate, atunci numerele:

$$A_1B_1^p, A_2B_2^p, \ldots, A_nB_n^p, \quad p \in N, p \leq n-2$$

sunt lungimile laturilor unui poligon.

(*Marian Dincă*, G.M. seria metodică nr.3 – 4 / 1984)

Soluţie. Alegem originea în centrul poligonului $A_1A_2 \ldots A_n$ şi axa reală trecând printr-un vârf al poligonului.

Afixele vârfurilor sunt rădăcinile ecuaţiei $x^n - 1 = 0$, multiplicate cu un număr real a; fie ε_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ rădăcinile ecuaţiei. Rezultă că afixele vârfurilor poligonului $B_1B_2 \ldots B_n$ sunt de forma $b_i = \lambda\varepsilon_i + \mu$ cu $\lambda, \mu \in \mathbf{C}$ reprezentând o asemănare care este compusă dintr-o omotetie, o rotaţie şi o translaţie.

Avem identitatea:

$$\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i(b_i - \varepsilon_i)^p = 0, \quad 1 \leq p \leq n-2, \quad p \in N \tag{1}.$$

Într-adevăr, dezvoltând binoamele după formula lui Newton, obţinem:

$$\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i(b_i - \varepsilon_i)^p = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i(\lambda\varepsilon_i + \mu - \varepsilon_i)^p = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i[(\lambda-1)\varepsilon_i + \mu)]^p =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \left(\sum_{k=0}^{p} C_p^k (\lambda-1)^k \varepsilon_i^k \mu^{p-k} \right) = \sum_{k=0}^{p} (\lambda-1)^k \mu^{p-k} C_p^k \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^{k-1}.$$

Dacă ε_1 este rădăcină primitivă a unităţii, atunci $\varepsilon_i = \varepsilon_1^i$, $i = \overline{1,n}$ şi pentru $0 \leq k < p$ avem $1 \leq k+1 < p+1 < n$ deci $\varepsilon_1^{k-1} \neq 1$.

Rezultă:

$$\sum \varepsilon_i^{k-1} = \sum \left(\varepsilon_1^i\right)^{k-1} = \sum \left(\varepsilon_1^{k-1}\right)^i = \varepsilon_1^{k-1} \cdot \frac{1 - \left(\varepsilon_1^{k-1}\right)^n}{1 - \varepsilon_1^{k-1}} =$$

$$= \varepsilon_1^{k-1} \cdot \frac{1 - \left(\varepsilon_1^n\right)^{k-1}}{1 - \varepsilon_1^{k-1}} = 0 \text{ şi obţinem identitatea (1).}$$

Din identitatea (1), trecând câte un termen în membrul drept şi aplicând proprietatea modulului, se obţin n inegalităţi între lungimile A_iB_i, $i = \overline{1,n}$. De exemplu:

$$\sum_{i=1}^{n-1} \varepsilon_i(b_i - \varepsilon_i)^p = -\varepsilon_n(b_n - \varepsilon_n)^p.$$

deci:

$$\sum_{i=1}^{n-1} |\varepsilon_i(b_i - \varepsilon_i)^p| \geq \left| \sum_{i=1}^{n-1} \varepsilon_i(b_i - \varepsilon_i)^p \right| = |-\varepsilon_n(b_n - \varepsilon_n)^p|$$

şi deoarece $|\varepsilon_i| = 1$ rezultă că

$$\sum_{i=1}^{n-1} |(b_i - \varepsilon_i)|^p \geq |b_n - \varepsilon_n|^p$$

sau

$$A_1B_1^p + A_2B_2^p + \ldots + A_{n-1}B_{n-1}^p \geq A_nB_n^p .$$

Analog se obţin celelalte inegalităţi şi rezultă astfel teorema.

Observaţii: Dacă poligonul $B_1B_2...B_n$ se constrânge într-un punct M, se obţine teorema: Dacă $A_1A_2...A_n$ este un poligon regulat, atunci cu segmentele de lungime MA_i^p, $i = \overline{1,n}$, se poate forma un poligon ($p \in \mathbf{N}$, $p \leq n - 2$). Pentru $n = 3$ se obţine teorema lui Dimitrie Pompeiu.

2. Fie poligoanele regulate $A_1A_2...A_n$ şi $B_1B_2...B_n$ la fel orientate. Dacă $A_iB_i = x_i$, $i = 1, 2, ..., n$, atunci cu segmentele care au lungimile egale cu produsele $x_1x_2...x_k$; $x_2x_3...x_{k+1}$; ...; $x_nx_1x_2...x_{k-1}$ se poate construi un poligon convex, unde $1 \leq k \leq n - 2$.

(Marian Dincă)

Soluţie: Alegem originea în centrul poligonului $A_1A_2...A_n$ şi axa reală trecând prin A_1. Considerând raza cercului circumscris poligonului $A_1A_2...A_n$ egală cu unitatea, afixele punctelor $A_1, A_2, ..., A_n$ vor fi $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, ..., \varepsilon_n$ unde $\varepsilon_k = \varepsilon^{k-1}$, $k = 1,2,...n$ unde ε este rădăcină primitivă a unităţii. Afixele punctelor $B_1, B_2, ..., B_n$ vor fi $(a \cdot \varepsilon_k + b)$ unde a şi b sunt numere complexe, deoarece poligoanele sunt asemenea.

Avem identitatea:

$$(X_1 - X_2) + (X_2 - X_3) + (X_3 - X_4) + \ldots + (X_{n-1} - X_n) + (X_n - X_1) = 0 \qquad (1).$$

Făcând

$$X_1 = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)...(b_{k-1} - a_{k+1}); \; X_2 = (b_2 - a_2)(b_3 - a_3)...(b_{k-2} - a_{k-2})$$

$$X_3 = (b_3 - a_3)(b_4 - a_4)...(b_{k-3} - a_{k-3})...X_n = (b_n - a_n)(b_1 - a_1)...(b_k - a_k)$$

unde $b_k = a\varepsilon_k + b$; $a_k = \varepsilon_k$; introducând aceste valori în (1) obţinem după ce dăm factor comun în paranteze:

$$(b_2 - a_2)(b_3 - a_3)...(b_{k+1} - a_{k-1})(b_1 - a_1 + a_{k-2} - b_{k-2}) +$$

$$+ (b_3 - a_3)(b_4 - a_4)...(b_{k-2} - a_{k-2})$$

$$(b_2 - a_2 + a_{k-3} - b_{k-3}) + ...(b_n - a_n)(b_1 - a_1)...(b_{k-1} - a_{k-1})(b_{n-1} - a_{n-1} +$$

$$+ a_k - b_k) + (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)...(b_k - a_k)(b_n - a_n + a_{k-1} - b_{k-1}) = 0 \qquad (2).$$

Dar

$$b_1 - a_1 + a_{k-2} - b_{k-2} = a + b - 1 + \varepsilon^{k+1} - a\varepsilon^{k+1} - b = (a - 1)(1 - \varepsilon^{k-1})$$

$$b_2 - a_2 + a_{k-3} - b_{k-3} = a\varepsilon + b - \varepsilon + \varepsilon^{k+2} - a\varepsilon^{k+2} - b = (a - 1)(1 - \varepsilon^{k-1})\varepsilon$$

$$b_{n-1} - a_{n-1} + a_k - b_k = a\varepsilon^{n-2} + b - \varepsilon^{n-2} + \varepsilon^{k-1} - a\varepsilon^{k-1} - b =$$

$$= (a - 1)(1 - \varepsilon^{k-1})\varepsilon^{n-2}$$

$$b_n - a_n + a_{k-1} - b_{k-1} = a\varepsilon^{n-1} + b - \varepsilon^{n-1} + \varepsilon^k - a\varepsilon^k - b = (a - 1)(1 - \varepsilon^{k-1})\varepsilon^{n-1} .$$

Cu aceste valori, în identitatea (2) putem împărţi prin $(a - 1)(1 - \varepsilon^{k-1}) \neq 0$ şi, trecând câte un termen în membrul drept cu semn schimbat şi aplicând inegalitatea modulului, obţinem n inegalităţi între numerele: $x_1x_2...x_k$; ...; $x_nx_1x_2...x_{k-1}$ care este condiţia necesară şi suficientă ca aceste numere să fie lungimile laturilor unui poligon convex.

Observaţie: Când poligonul $B_1B_2...B_n$ se constrânge într-un punct şi $k = 1$ se obţine *teorema lui Theodor Angheluţă*. Pentru $n = 4$ şi $k = 2$ se obţine problema din G.M. – B. nr. 9/1980, pag. 403.

3. Primă teoremă reciprocă a lui Dimitrie Pompeiu

Fiind dat un triunghi ABC, dacă cu distanţele de la orice punct M la vârfurile triunghiului se poate forma un triunghi, eventual degenerat, atunci triunghiul ABC este echilateral.

Soluţie. Fie a, b, c, z afixele punctelor A, B, C, M; avem inegalităţile:

$$|z - a| + |z - b| \geq |z - c| \qquad (1)$$

$$|z - b| + |z - c| \geq |z - a| \qquad (2)$$

$$|z - c| + |z - a| \geq |z - b| \qquad (3)$$

Făcând $z = a$, din (1) şi (3) rezultă:

$$|a - b| \geq |a - c| \text{ şi } |a - c| \geq |a - b| ;$$

rezultă:

$$|a - b| = |a - c| \qquad (4).$$

Făcând $z = a$, din (1) şi (2) rezultă

$$|b - a| \geq |b - c| \text{ şi } |b - c| \geq |b - a|$$

adică:

$$|b - a| = |b - c| \qquad (5).$$

Din (4) şi (5) rezultă

$$|a - b| = |b - c| = |a - c| \text{ sau } AB = BC = CA.$$

Deci triunghiul ABC este echilateral.

4. A doua teoremă reciprocă a lui Dimitrie Pompeiu

Fiind dat un triunghi ABC, putem găsi totdeauna un punct M în planul unui triunghi echilateral UVW, astfel ca distanţele MU, MV, MW să fie egale cu laturile triunghiului ABC.

(Aurel Angelescu)

Soluţie. Fie a, b, c lungimile laturilor triunghiului ABC. Luăm originea în centrul O al triunghiului echilateral, axa reală peste UV. Atunci vârfurile triunghiului echilateral au afixele r, εr, $\varepsilon^2 r$, unde r este raza cercului circumscris triunghiului echilateral şi $\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$. Notăm cu z afixul

punctului căutat M şi cu u, v, w unghiurile dreptelor UM, VM, WM cu axa reală. Avem:

$$z - r = ae^{iu}\,;\; z - \varepsilon r = be^{iv};\; z - \varepsilon^2 r = ce^{iw} \qquad (6).$$

Din (6) rezultă:

$$ae^{iu} + be^{iv} + ce^{iw} = 0 \qquad (7).$$

Pe de altă parte, dacă α, β, γ sunt unghiurile pe care laturile triunghiului ABC le fac cu axa reală, conturul ABC fiind închis avem:

$$ae^{i\alpha} + be^{i\beta} + ce^{i\gamma} = 0 \qquad (8).$$

Unghiurile α, β, γ, sunt cunoscute. Confruntând relaţiile (7) şi (8) putem să luăm:

$$u = \alpha,\; v = \beta - \frac{2\pi}{3},\; w = \gamma - \frac{4\pi}{3}.$$

Din (6) rezultă $3z = ae^{iu} + be^{iv} + ce^{iw}$ deci

$$z = \frac{ae^{iu} + be^{iv} + ce^{iw}}{3}$$

care este afixul punctului M căutat.

Capitolul VII

PROBLEME DE COLINIARITATE

1. Se consideră într-un plan trei cercuri de centre O_1, O_2, O_3 şi de raze R_1, R_2, R_3. Fie S_1, S'_1 centrele de asemănare directă şi inversă a cercurilor (O_2) şi (O_3), S'_2 şi S_2 ale cercurilor (O_3) şi (O_1) iar S_3 şi S'_3 ale cercurilor (O_1) şi (O_2). Să se demonstreze că:

a) Punctele S_1, S_2, S_3 sunt coliniare (*d'Alembert*).

b) Grupurile de puncte (S'_1,S'_2,S_3); (S'_1,S_2,S'_3); (S_1,S'_2,S'_3) sunt coliniare.

(*Gh. Ţiţeica, Probleme de geometrie, ediţia a VI-a*)

Soluţie. a) Fie afixele punctelor notate cu litere mici corespunzătoare. Deoarece S_1 este centru de omotetie directă rezultă:

$$\frac{S_1O_2}{S_1O_3} = \frac{R_2}{R_3} \qquad (1).$$

Analog

$$\frac{S_2O_3}{S_2O_1} = \frac{R_3}{R_1},\; \frac{S_3O_1}{S_3O_2} = \frac{R_1}{R_2} \qquad (2).$$

Relaţiile (1) şi (2) în planul complex se scriu:

$$\frac{o_2 - s_1}{o_3 - s_1} = \frac{R_2}{R_3} \qquad (3)$$

de unde rezultă

$$s_1(R_3 - R_2) = o_2R_3 - o_3R_2 \qquad (4).$$

Din (4) rezultă:

$$s_2(R_3 - r_1) = R_3o_1 - R_1o_3 \qquad (5)$$

şi

$$s_3(R_2 - R_1) = R_2o_1 - R_1o_2 \qquad (6).$$

Pentru ca punctele de afixe s_1, s_2, s_3 să fie coliniare este suficient să existe trei numere reale k_1, k_2, k_3 astfel încât $k_1 + k_2 + k_3 = 0$ şi $k_1s_1 + k_2s_2 + k_3s_3 = 0$. Pentru aceasta înmulţim relaţia (3) cu R_1 relaţia (5) cu $-R_2$ şi relaţia (6) cu R_3 şi le adunăm:

$$s_1(R_3 - R_2)R_1 - s_2(R_3 - R_1)R_2 + s_3(R_2 - R_1)R_3 =$$
$$= o_2R_3R_1 - o_3R_2R_1 - o_1R_3R_2 + o_3R_1R_2 + o_1R_2R_3 - o_2R_1R_3 = 0$$

(s-au redus termenii din dreapta). Luăm $k_1 = (R_3 - R_2)R_1$, $k_2 = -(R_3 - R_1)R_2$, $k_3 = (R_2 - R_1)R_3$ se observă că avem: $k_1 + k_2 + k_3 = 0$. Analog se demonstrează punctul b).

2. Teorema lui Desargues

Fie triunghiurile ABC şi $A'B'C'$. Dreptele AA', BB', CC' se întâlnesc într-un punct O. Laturile BC şi $B'C'$, CA şi $C'A'$, AB şi $A'B'$ se întâlnesc în trei puncte u, v, w coliniare (triunghiuri omologice).

Alegem originea axelor în O; fie afixele punctelor notate cu litere mici corespunzătoare.

Deoarece punctele C, A, A' sunt coliniare, rezultă că $a' = k_1 a$.

De asemenea, $b' = k_2 b$ şi $c' = k_3 c$. Ecuaţia dreptei BC este

$$(\bar{b} - \bar{c})z - (b - c)\bar{z} + b\bar{c} - \bar{b}c = 0 \qquad (1).$$

Ecuaţia dreptei $B'C'$ este

$$(\bar{b}' - \bar{c}')z - (b' - c')\bar{z} + b'\bar{c}' - \bar{b}'c' = 0 \qquad (2).$$

Ecuaţia (2) se mai scrie

$$(k_2\bar{b} - k_3\bar{c})z - (k_2 b - k_3 c)\bar{z} + k_2 k_3(b\bar{c} - \bar{b}c) = 0 \qquad (3).$$

Înmulţind (1) cu $k_2 b - k_3 c$ şi (3) cu $b - c$ şi apoi scăzându-le obţinem:

$$z = \frac{(b\bar{c} - \bar{b}c)(k_2 b - k_3 c - k_2 k_3(b - c))}{(\bar{b} - \bar{c})(k_2 b - k_3 c) - (b - c)(k_2\bar{b} - k_3\bar{c})} = \frac{k_2 b - k_3 c - k_2 k_3(b - c)}{k_2 - k_3} \qquad (4).$$

Din relaţia (4) se obţine împărţind fracţia cu produsul $k_2 k_3$:

$$z = \frac{\left(\frac{1}{k_3} - 1\right)b - \left(\frac{1}{k_2} - 1\right)c}{\frac{1}{k_3} - \frac{1}{k_2}} \qquad (5).$$

Notând $p_i + 1 = \frac{1}{k_i}$, $i = 1, 2, 3$, relaţia (5) devine:

$$z = \frac{p_3 b - p_2 c}{p_3 - p_2} \qquad (6).$$

Expresia (6) este afixul lui u analog se obţin afixele lui v şi w şi anume:

$$v = \frac{p_1 c - p_3 a}{p_1 - p_3}, \quad w = \frac{p_2 a - p_1 b}{p_2 - p_1} \qquad (7).$$

Condiţia ca punctele de afixe u, v, w să fie coliniare este să existe trei numere reale s_1, s_2, s_3 astfel încât $s_1 u + s_2 v + s_3 w = 0$ şi $s_1 + s_2 + s_3 = 0$; într-adevăr, dacă luăm $s_1 = (p_3 - p_2)p_1$, $s_2 = (p_1 - p_3)p_2$ şi $s_3 = (p_2 - p_1)p_3$ se obţine condiţia de coliniaritate.

3. Teorema lui Pappus

Fie A, B, C trei puncte pe o dreaptă d şi A', B', C' trei puncte pe o dreaptă d'. Considerăm intersecţiile $U = (BC', B'C)$, $V = (CA', C'A)$, $W = (AB', A'B)$. Punctele U, V, W sunt coliniare.

Soluţie. Fie $d \cap d' = 0$ şi $OA' = a'$, $OB' = b'$, $OC' = c'$, $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$ şi unghiul dintre dreptele d şi d' egal cu α. Alegem ca axă reală dreapta d cu originea în O; atunci afixele punctelor A, B, C sunt a, b, c iar afixele punctelor A', B', C' sunt $a'e^{i\alpha}$, $b'e^{i\alpha}$, $c'e^{i\alpha}$. Ecuaţia dreptei $B'C$ este:

$$(\bar{b}'e^{-i\alpha} - c)z - (b'e^{i\alpha} - c)\bar{z} + b'ce^{i\alpha} - b'e^{-i\alpha}c = 0 \qquad (1).$$

Ecuaţia dreptei BC' este:

$$(b - c'e^{-i\alpha})z - (b - c'e^{i\alpha})z + bc'e^{-i\alpha} - bc'e^{i\alpha} = 0 \qquad (2).$$

Înmulţind (1) cu $b - c'e^{i\alpha}$ şi (2) cu $b'e^{i\alpha} - c$ şi scăzându-le obţinem:

$$z = \frac{b'c(e^{i\alpha} - e^{-i\alpha})(b - c'e^{i\alpha}) - bc'(e^{-i\alpha} - e^{i\alpha}))(b'e^{i\alpha} - c)}{(b'e^{-i\alpha} - c)(b - c'e^{i\alpha}) - (b - c'e^{-i\alpha})(b'e^{i\alpha} - c)} =$$

$$= \frac{(e^{i\alpha} - e^{-i\alpha})[b'c(b - c'e^{i}) - bc'(b'e^{i} - c)]}{(e^{i\alpha} - e^{-i\alpha})(cc' - bb')} - \frac{bc(b' - c') + b'c'(b - c)e^{i\alpha}}{cc' - bb'}.$$

Deci afixul punctului U este

$$\frac{bc(b' - c') + b'c'(b - c)e^{i\alpha}}{cc' - bb'}.$$

Analog se află afixul lui V care este

$$\frac{ca(c' - a') + c'a'(c - a)e^{i\alpha}}{aa' - cc'}$$

iar afixul lui W este

$$\frac{ab(a' - b') + a'b'(a - b)e^{i\alpha}}{bb' - aa'}.$$

Condiţia ca trei puncte de afixe z_1, z_2, z_3 să fie coliniare este ca să existe trei numere reale k_1, k_2, k_3 astfel ca $k_1 z_1 + k_2 z_2 + k_3 z_3 = 0$ şi $k_1 + k_2 + k_3 = 0$.

Pentru afixele punctelor U, V, W luăm $k_1 = \frac{cc' - bb'}{bb'cc'}$, $k_2 = \frac{aa' - cc'}{aa'cc'}$ şi $k_3 = \frac{bb' - aa'}{bb'aa'}$ şi rezultă imediat condiţia de coliniaritate.

4. Teorema lui Salmon

Printr-un punct O al unui cerc se consideră coardele OA, OB, OC (A, B, C puncte pe cerc). Să se arate că cercurile de diametre OA, OB, OC se retaie două câte două în trei puncte coliniare.

Soluţie. Alegem originea în O şi notăm afixele punctelor A, B, C, cu a, b, c. Ecuaţia cercului de diametru OA în planul complex se scrie:

$$\left(z-\frac{a}{2}\right)\left(\bar{z}-\frac{\bar{a}}{2}\right)=\frac{a}{2}\frac{\bar{a}}{2}$$

sau, după desfacerea parantezelor şi eliminarea numitorilor:

$$2z\bar{z}-a\bar{z}-\bar{a}z=0 \quad (1);$$

analog se obţin ecuaţiile cercurilor de diametre OB, OC:

$$2z\bar{z}-b\bar{z}-\bar{b}z=0 \quad (2)$$

şi

$$2z\bar{z}-a\bar{z}-\bar{a}z=0 \quad (3).$$

Scăzând din (1) pe (2) rezultă $(a-b)\bar{z}+(\bar{a}-\bar{b})z=0$ de unde rezultă:

$$\bar{z}=-\frac{\bar{a}-\bar{b}}{a-b}z \quad (4)$$

iar din (1) şi (4) rezultă:

$$-2\frac{\bar{a}-\bar{b}}{a-b}z^2-\bar{a}z-a\left(-\frac{\bar{a}-\bar{b}}{a-b}z\right)=0;$$

obţinem $z=0$ adică punctul O şi $z=\dfrac{\bar{a}b-a\bar{b}}{2(\bar{a}-\bar{b})}$ care este afixul punctului de intersecţie al cercurilor de diametre OA şi OB; să-l notăm cu:

$$z_{12}=\frac{\bar{a}b-a\bar{b}}{2(\bar{a}-\bar{b})} \quad (5).$$

Analog

$$z_{23}=\frac{\bar{b}c-b\bar{c}}{2(\bar{b}-\bar{c})} \quad (6)$$

şi

$$z_{31}=\frac{\bar{c}a-c\bar{a}}{2(\bar{c}-\bar{a})} \quad (7).$$

Deoarece punctele O, A, B, C sunt conciclice (pe acelaşi cerc) rezultă că raportul anarmonic al afixelor lor este real, deci (o, a, b, c) = real sau $\dfrac{b-o}{b-a}$; $\dfrac{c-o}{c-a}$ = real. De unde rezultă $\dfrac{b(a-c)}{c(a-b)}$ = real; conjugând rezultă

$$\frac{\bar{b}(\bar{a}-\bar{c})}{\bar{c}(\bar{a}-\bar{b})}=\text{real} \quad (8).$$

Analog se obţine, ţinând seama de proprietăţile rapoartelor anarmonice,

$$\frac{\bar{c}(\bar{b}-\bar{a})}{\bar{a}(\bar{b}-\bar{c})}=\text{real} \quad (9)$$

şi

$$\frac{\bar{a}(\bar{c}-\bar{b})}{\bar{b}(\bar{c}-\bar{a})}=\text{real} \quad (10).$$

Notăm $\bar{b}(\bar{a}-\bar{c})=m$, $\bar{c}(\bar{b}-\bar{a})=n$ şi $\bar{a}(\bar{b}-\bar{c})=-p$, se observă că $m+n+p=0$ (11).

Deoarece $\dfrac{m}{n}$ = real = r, rezultă că arg m = arg n şi analog arg n = arg p.

$$m=k_1(\cos t+i\sin t),\ n=k_2(\cos t+i\sin t),\ p=k_3(\cos t+i\sin t) \quad (12)$$

k_1, k_2, k_3 numere reale pozitive. Din (11) şi (12) rezultă:

$$k_1+k_2+k_3=0 \quad (13).$$

Avem

$$-nz_{12}-pz_{12}-mz_{31}=\frac{1}{2}\bar{c}(\bar{a}b-a\bar{b})+\bar{a}(\bar{b}c-b\bar{c})+\bar{b}(\bar{c}a-c\bar{a})=0 \quad (14).$$

Din relaţiile (12) şi (14) ţinând cont de faptul că $\cos t+i\sin t\neq 0$ rezultă $k_1z_{31}+k_2z_{32}+k_3z_{23}=0$, ceea ce ne arată că punctele de afixe Z_{12}, Z_{23}, Z_{31} sunt coliniare.

5. Teorema lui Blaise Pascal

Punctele de intersecţie ale laturilor opuse ale unui hexagon înscris într-un cerc sunt coliniare.

Soluţie. Notăm afixele punctelor $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ cu litere mici corespunzătoare. Alegem originea axelor în centrul cercului circumscris hexagonului $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ şi luăm raza cercului egală cu unitatea, pentru simplificarea calculelor.

Ecuaţia dreptei (A_1A_2) în planul complex se scrie:

$$z+a_1a_2\bar{z}=a_1+a_2 \quad (1).$$

Ecuaţia dreptei (A_4A_5) în planul complex se scrie:

$$z+a_4a_5\bar{z}=a_4+a_5 \quad (2).$$

Înmulţim ecuaţia (1) cu a_4a_5 şi ecuaţia (2) cu a_1a_2 şi le scădem. Obţinem:

$$z=\frac{(a_1+a_2)a_4a_5-(a_4+a_5)a_1a_2}{a_4a_5-a_1a_2} \quad (3).$$

Fie $(A_1A_2)\cap(A_4A_5)=B_1$; atunci afixul b_1 al lui B_1 este dat de (3):

$$b_1=\frac{(a_1+a_2)a_4a_5-(a_4+a_5)a_1a_2}{a_4a_5-a_1a_2}=\frac{(\bar{a}_1+\bar{a}_2)-(\bar{a}_4+\bar{a}_5)}{\bar{a}_1\bar{a}_2-\bar{a}_4\bar{a}_5} \quad (4);$$

analog pentru $(A_3A_4)\cap(A_6A_1)=B_2$ şi $(A_2A_3)\cap(A_5A_6)=B_3$ obţinem expresiile afixelor

$$b_2=\frac{(\bar{a}_3-\bar{a}_4)-(\bar{a}_6+\bar{a}_1)}{\bar{a}_3\bar{a}_4-\bar{a}_6\bar{a}_1},\ \text{respectiv}\ b_3=\frac{(\bar{a}_2+\bar{a}_3)-(\bar{a}_5+\bar{a}_6)}{\bar{a}_2\bar{a}_3-\bar{a}_5\bar{a}_6} \quad (5).$$

Pentru a arăta că punctele B_1, B_2, B_3 sunt coliniare, va trebui să arătăm că există $k_1, k_2, k_3\in\mathbf{R}$ astfel încât

$$k_1+k_2+k_3=0 \text{ şi } k_1b_1+k_2b_2+k_3b_3=0 \quad (6);$$

notăm $\bar{a}_1-\bar{a}_4=u$; $\bar{a}_5-\bar{a}_2=v$; $\bar{a}_3-\bar{a}_6=w$ atunci:

$$b_1=\frac{u-v}{\bar{a}_1\bar{a}_2-\bar{a}_4\bar{a}_5};\ b_2=\frac{w-y}{\bar{a}_3\bar{a}_4-\bar{a}_6\bar{a}_1};\ b_3=\frac{v-w}{\bar{a}_5\bar{a}_6-\bar{a}_2\bar{a}_3} \quad (7).$$

Se observă că:

$$w(\bar{a}_1\bar{a}_2 - \bar{a}_4\bar{a}_5)b_1 + v(\bar{a}_3\bar{a}_4 - \bar{a}_6\bar{a}_1)b_2 + u(\bar{a}_5\bar{a}_6 - \bar{a}_2\bar{a}_3)b_3 =$$

$$= w(u - v) + v(w - u) + w(v - w) = 0 \qquad (8)$$

şi

$$w(\bar{a}_1\bar{a}_2 - \bar{a}_4\bar{a}_5) + v(\bar{a}_3\bar{a}_4 - \bar{a}_6\bar{a}_1) + u(\bar{a}_5\bar{a}_6 - \bar{a}_2\bar{a}_3) =$$

$$= (\bar{a}_3 - \bar{a}_6)(\bar{a}_1\bar{a}_2 - \bar{a}_4\bar{a}_5) + (\bar{a}_5 - \bar{a}_2)(\bar{a}_3\bar{a}_4 - \bar{a}_6\bar{a}_1) +$$

$$+ (\bar{a}_1 - \bar{a}_4)(\bar{a}_5\bar{a}_6 - \bar{a}_2\bar{a}_3) = 0 \qquad (9);$$

fie $a = \cos\alpha + i\sin\alpha$, $b = \cos\beta + i\sin\beta$. Avem:

$$a - b = (\cos\alpha - \cos\beta) + i(\sin\alpha - \sin\beta) = -2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2} +$$

$$+ 2i\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2} = 2i\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\left(\cos\frac{\alpha+\beta}{2} + i\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \qquad (10);$$

din (10) rezultă

$$\arg(a-b) = \arg i + \frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{\pi}{2} + \frac{\arg a + \arg b}{2} \qquad (11).$$

Calculăm:

$$\arg(w(\bar{a}_1\bar{a}_2 - \bar{a}_4\bar{a}_5)) = \arg w + \arg(\bar{a}_1\bar{a}_2 - \bar{a}_4\bar{a}_5) =$$

$$= \arg(\bar{a}_3 - \bar{a}_6) + \arg(\bar{a}_1\bar{a}_2 - \bar{a}_4\bar{a}_5) = \frac{\pi}{2} + \frac{\arg\bar{a}_3 + \arg\bar{a}_6}{2} + \frac{\pi}{2} +$$

$$+ \frac{\arg(\bar{a}_1\bar{a}_2) + \arg(\bar{a}_4\bar{a}_5)}{2} = \pi + \frac{\arg\bar{a}_3 + \arg\bar{a}_6}{2} + \frac{\arg\bar{a}_1 + \arg\bar{a}_2 + \arg\bar{a}_4 + \arg\bar{a}_5}{2}$$

$$= \pi + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{6}\arg\bar{a}_k \qquad (12).$$

Analog rezultă

$$\arg(v(\bar{a}_3\bar{a}_4 - \bar{a}_6\bar{a}_1)) = \arg(u(\bar{a}_5\bar{a}_6 - \bar{a}_2\bar{a}_3)) =$$

$$= \pi + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{6}\arg\bar{a}_k \qquad (13)$$

deci:

$$w(\bar{a}_1\bar{a}_2 - \bar{a}_4\bar{a}_5) = r_1e^{ix},\ v(\bar{a}_3\bar{a}_4 - \bar{a}_6\bar{a}_1) = r_2e^{ix},\ u(\bar{a}_5\bar{a}_6 - \bar{a}_2\bar{a}_3) = r_3e^{ix}$$

unde

$$x = \pi + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{6}\arg\bar{a}_k \qquad (14).$$

Introducând relaţiile (14) în relaţiile (8) şi (9) rezultă ţinând seama că $e^{ix} = \cos x + i\sin x \neq 0$

$r_1b_1 + r_2b_2 + r_3b_3 = 0$ şi $r_1 + r_2 + r_3 = 0$ c.c.t.d.

(Demonstraţia aparţine lui *Marian Dincă*).

Capitolul VIII

PROBLEME DE CONCURENŢĂ

1. Fie ABC un triunghi oarecare înscris în cercul de centru O şi fie M, N, P mijloacele laturilor BC, CA, AB. Dreptele OA, OB, OC taie laturile NP, PM, MN ale triunghiului median MNP respectiv în punctele E, F, G. Să se arate că dreptele ME, NF şi PG sunt concurente.

(*Sorin Deaconu*, G.M. 12/1983, p. 463)

Soluţie. Fie originea axelor în centrul O al cercului dat, afixele lui A, B, C, M, N, P notate cu a, b, c, m, n, p. Rezultă imediat că:

$$m = \frac{b+c}{2},\quad n = \frac{a+c}{2} \text{ şi } p = \frac{a+b}{2} \qquad (1).$$

Notăm:

$$\frac{EN}{EP} = k_1,\quad \frac{FP}{FM} = k_2,\quad \frac{GM}{GN} = k_3.$$

Din faptul că $\frac{EN}{EP} = k_1$ rezultă:

$$\frac{n - k_1p}{1 - k_1} = e,$$

iar din faptul că punctele A, E şi O sunt coliniare rezultă că $e = \lambda_1 a$, cu $\lambda_1 \in \mathbf{R}$ de unde obţinem egalitatea:

$$\frac{n - k_1p}{1 - k_1} = \lambda_1 a$$

şi conjugata ei este:

$$\frac{\bar{n} - k_1\bar{p}}{1 - k_1} = \lambda_1\bar{a},$$

prin înmulţirea lor se obţine egalitatea:

$$(n - k_1p)\bar{a} = (\bar{n} - k_1\bar{p})a.$$

De aici scoatem că:

$$k_1 = \frac{\bar{a}c - a\bar{c}}{\bar{a}b - a\bar{b}}, \text{ ţinând cont de (1).}$$

În mod analog găsim:

$$k_2 = \frac{a\bar{b} - \bar{a}b}{\bar{b}c - b\bar{c}} \qquad (2)$$

şi

$$k_3 = \frac{b\bar{c} - \bar{b}c}{a\bar{c} - \bar{a}c} \tag{3}.$$

Din relaţiile (2) şi (3) obţinem $k_1k_2k_3 = -1$ şi conform teoremei lui Ceva rezultă concurenţa dreptelor ME, NF şi PG.

2. Fie triunghiul ABC. Se construiesc pe laturile acestuia triunghiurile echilaterale ABC_1, BCA_1, CAB_1. Fie α, β, γ mijloacele segmentelor B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1. Să se arate că perpendiculare duse din α, β, γ pe laturile BC, CA, AB sunt concurente.

(Dan Voiculescu)

Soluţie. Notăm afixele punctelor A, B, C, A_1, B_1, C_1, α, β, γ cu literele a, b, c, a_1, b_1, c_1, α, β, γ. Triunghiurile construite fiind echilaterale rezultă că:

$$c_1 + \varepsilon b + \varepsilon^2 a = 0\,, \quad a_1 + \varepsilon c + \varepsilon^2 b = 0\,, \quad b_1 + \varepsilon a + \varepsilon^2 c = 0$$

$$\alpha = -\left[\frac{1}{2}(a+b)\varepsilon + (a+c)\varepsilon^2\right];\ \beta = -\frac{1}{2}\left[(b+c)\varepsilon + (b+a)\varepsilon^2\right] \tag{1}.$$

Ecuaţia perpendicularei duse din z_0 pe dreapta $\alpha\bar{z} + \bar{\alpha}z + a = 0$ este:

$$\alpha(\bar{z} - \bar{z}_0) = \bar{\alpha}(z - z_0) \tag{2}.$$

În cazul nostru, dreapta BC are ecuaţia:

$$(\bar{b} - \bar{c})Z - (b - c)\bar{Z} + b\bar{c} - \bar{b}c \text{ sau } \frac{\bar{b} - \bar{c}}{b\bar{c} - \bar{b} - c}z - \frac{b - c}{b\bar{c} - \bar{b}c} + 1 = 0 \tag{3}.$$

Rezultă că:

$$\alpha = \frac{\bar{b} - \bar{c}}{b\bar{c} - \bar{b}c};\ \bar{\alpha} = -\frac{b - c}{b\bar{c} - \bar{b}c}.$$

Obţinem ecuaţia perpendicularei duse din z_0 pe dreapta BC:

$$(\bar{b} - \bar{c})(Z - z_0) = -(b - c)(\bar{Z} - \bar{z}_0) \tag{4}.$$

Scriem ecuaţiile perpendicularelor duse din α, β, γ pe dreptele BC, CA, AB:

$$(\bar{b} - \bar{c})\left(Z + \frac{a+b}{2}\varepsilon + \frac{a+c}{2}\varepsilon^2\right) = -(b - c)\left(\bar{Z} + \frac{\bar{a} + \bar{b}}{2}\bar{\varepsilon} + \frac{a+c}{2}\bar{\varepsilon}^2\right) \tag{5}$$

$$(\bar{c} - \bar{a})\left(Z + \frac{b+c}{2}\varepsilon + \frac{b+a}{2}\varepsilon^2\right) = -(c - a)\left(\bar{Z} + \frac{\bar{b} + \bar{c}}{2} + \frac{\bar{b} + \bar{a}}{2}\bar{\varepsilon}^2\right) \tag{6}$$

$$(\bar{a} - \bar{b})\left(Z + \frac{c+a}{2} + \frac{c+b}{2}\varepsilon^2\right) = -(a - b)\left(\bar{Z} + \frac{\bar{c} + \bar{a}}{2}\bar{\varepsilon} + \frac{\bar{c} + \bar{b}}{2}\bar{\varepsilon}^2\right) \tag{7}.$$

Adunând ecuaţiile (5), (6), (7) se obţine o identitate şi rezultă că dreptele sunt concurente.

3. Fie ABC un triunghi oarecare, (d) o dreaptă în planul triunghiului, A', B', C' simetricele punctelor A, B, C în raport cu dreapta (d). Arătaţi că perpendicularele din A', B', C' pe BC, AC, AB respectiv sunt concurente.

Soluţie. Alegem ca axă reală dreapta (d). Fie afixele punctelor A, B, C notate cu a, b, c. Coeficientul unghiular complex al dreptei BC este:

$$\frac{b - c}{\bar{b} - \bar{c}}$$

deci coeficientul unghiular al perpendicularei din A' pe BC este:

$$-\frac{b - c}{\bar{b} - \bar{c}}$$

şi ecuaţia acestei perpendiculare va fi:

$$Z - \bar{a} = -\frac{b - c}{\bar{b} - \bar{c}}(\bar{Z} - a)$$

sau

$$(Z - \bar{a})(\bar{b} - \bar{c}) + (b - c)(\bar{Z} - a) = 0 \tag{1}.$$

Analog ecuaţia perpendicularei din B' pe AC va fi:

$$(Z - \bar{b})(\bar{a} - \bar{c}) + (a - c)(\bar{Z} - b) = 0 \tag{2}.$$

Ecuaţia perpendicularei din C' pe AB va fi:

$$(Z - \bar{c})(\bar{a} - \bar{b}) + (a - b)(\bar{Z} - c) = 0 \tag{3}.$$

Adunând ecuaţiile (1), (2) şi (3) rezultă o identitate ceea ce probează concurenţa dreptelor.

4. Fie ABC un triunghi înscris în cercul de centru O. Dacă O_a, O_b şi O_c sunt simetricele lui O faţă de BC, CA, AB să se arate că dreptele AO_a, BO_b, CO_c sunt concurente în centrul cercului lui Euler al triunghiului dat.

Soluţie. Fie originea axelor în O şi afixele punctelor A, B, C notate cu a, b, c. Avem atunci relaţia $o + o_a = b + c$, de unde $o_a = b + c$, unde o_a este afixul lui O_a. În mod analog găsim că afixele punctelor O_b şi O_c sunt $o_b = a + c$ şi $o_c = a + b$. Ecuaţia dreptei AO_a se scrie:

$$\begin{vmatrix} Z & \bar{Z} & 1 \\ a & \bar{a} & 1 \\ b + c & \bar{b} + \bar{c} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

sau

$$Z(\bar{a} - \bar{b} - \bar{c}) - \bar{Z}(a - b - c) + a(\bar{b} + \bar{c}) - \bar{a}(b + c) = 0 \tag{1}.$$

Afixul centrului cercului lui Euler este:

$$\frac{a + b + c}{2}.$$

Să arătăm acum că centrul cercului lui Euler se află pe dreapta (1), adică să arătăm că afixul centrului cercului lui Euler verifică ecuaţia (1).

Obţinem:

$$\frac{(a + b + c)}{2}(\bar{a} - \bar{b} - \bar{c}) - \frac{(\bar{a} + \bar{b} + \bar{c})}{2}(a - b - c) + a(\bar{b} + \bar{c}) - \bar{a}(b + c) = 0$$

sau

$$(a+b+c)(\bar{a}-\bar{b}-\bar{c})-(\bar{a}+\bar{b}+\bar{c})(a-b-c)+2a(\bar{b}+\bar{c})-$$
$$-2\bar{a}(b+c)=0 \Leftrightarrow 0=0.$$

Rezultă că centrul cercului lui Euler se află pe dreapta AO_a. În mod analog arătăm că el se află şi pe dreptele BO_b şi CO_c.

LOCURI GEOMETRICE

5. În triunghiul echilateral ABC, fie un punct M. Notăm cu M_1, M_2, M_3 proiecţiile punctului M pe laturile BC, CA, AB. Să se determine locul geometric al punctului G - centrul de greutate al triunghiului $M_1M_2M_3$.

(Marcel Chiriţă)

Soluţie. Fie originea axelor în centrul cercului circumscris triunghiului ABC. Axa reală trecând prin vârful A, luăm raza cercului circumscris triunghiului egală cu unitatea. Atunci afixele lui A, B, C sunt: 1, ε, ε^2 unde $1+\varepsilon+\varepsilon^2=0$ şi $\varepsilon^3=1$; fie m afixul lui M şi m_1, m_2, m_3 afixele punctelor M_1, M_2, M_3. Avem:

$$m_1=\frac{1}{2}(1+\varepsilon+\varepsilon\bar{m});\ m_2=\frac{1}{2}(\varepsilon+\varepsilon^2+m-\bar{m});\ m_3=\frac{1}{2}(\varepsilon^2+1+m-\varepsilon^2\bar{m}).$$

Afixul g al punctului G este

$$g=\frac{1}{3}(m_1+m_2+m_3)=\frac{1}{6}[1+\varepsilon+\varepsilon^2+\varepsilon+\varepsilon^2+1+3m-\bar{m}(1+\varepsilon+\varepsilon^2)]=\frac{m}{2}.$$

Deci $OG=\frac{1}{2}OM$, deci când M parcurge interiorul triunghiului ABC, punctul G parcurge interiorul unui triunghi asemenea cu triunghiul ABC având laturile paralele cu laturile triunghiului ABC şi de mărimi egale cu jumătate din latura lui ABC, având acelaşi centru ca şi ABC.

6. Se consideră două cercuri de centre O_1 şi O_2 $(O_1\neq O_2)$ şi de raze R_1 şi R_2. Fie un punct A situat pe primul cerc şi un punct B situat pe al doilea cerc astfel încât $O_1A \parallel O_2B$. Să se afle locul geometric al punctului C, pentru care triunghiul ABC este echilateral.

(Petre Liviu)

Soluţie. Alegem ca axă reală a planului complex dreapta O_1O_2. Fie $O_1O_2=d>0$. Afixul punctului A este

$$R_1(\cos\alpha+i\sin\alpha)$$

iar afixul punctului B este

$$R_2(\cos\alpha+i\sin\alpha)+d.$$

Dacă a, b, c sunt afixele lui A, B, C şi acestea formează un triunghi echilateral, avem relaţia:

$$a+b\varepsilon+c\varepsilon^2=0 \text{ sau } c+b\varepsilon^2+a\varepsilon=0,$$

unde ε este o rădăcină pur complexă a unităţii, adică $\varepsilon^3=1$; avem

$$c+R_2(\cos\alpha+i\sin\alpha)\varepsilon^2+d\varepsilon^2+R_1(\cos\alpha+i\sin\alpha)=0$$

de unde găsim:

$$e+d\varepsilon^2=-R_2(\cos\alpha+i\sin\alpha)\varepsilon^2-R_1(\cos\alpha+i\sin\alpha)\varepsilon$$
$$c+d\varepsilon^2=-(\cos\alpha+i\sin\alpha)\varepsilon(R_1+R_2\varepsilon).$$

Deci:

$$|c+d\varepsilon^2|=|-(\cos\alpha+i\sin\alpha)\varepsilon(R_1+R_2\varepsilon)|=|R_1+R_2\varepsilon|=\text{constant}.$$

Deci locul geometric al lui C este un cerc de rază egală cu $|R_1+R_2\varepsilon|$ şi centrul de afix $-d\varepsilon^2$, în cazul când luăm orientarea ABC. Dacă considerăm orientarea ACB atunci avem relaţia $c+a\varepsilon^2+b\varepsilon=0$ şi obţinem în acest caz:

$$c+R_1(\cos\alpha+i\sin\alpha)\varepsilon^2+R_2(\cos\alpha+i\sin\alpha)\varepsilon+d\varepsilon=0$$

de unde:

$$|c+d\varepsilon|=|R_1\varepsilon+R_2|$$

şi, în acest caz, locul geometric este tot un cerc de rază $R_1\varepsilon+R_2$ şi de centru de afix $-d\varepsilon$. Rezultă că locul geometric este format din cele două cercuri.

7. Se împart laturile CA, AB ale unui triunghi ABC, în acelaşi sens, în acelaşi raport k, prin punctele M, N. Dacă P este un punct fix al planului, care este locul centrului de greutate al triunghiului MNP când k variază ?

(Probleme de geometrie de Gh.Ţiţeica - ediţia a VI–a, pag. 47)

Soluţie. Notăm afixele punctelor A, B, C, M, N, P cu literele a, b, c, m, n, p. Avem:

$$\frac{MC}{MA}=\frac{NA}{NB}=k.$$

Rezultă că:

$$m=\frac{c-ka}{1-k},\quad n=\frac{a-kp}{1-k} \qquad (1).$$

Notăm cu G_1, G_2 centrele de greutate ale triunghiurilor ABP respectiv ACP şi notăm cu G centrul de greutate al triunghiului MNP:

$$g=\frac{m+n+p}{3}=\frac{c-ka}{3(1-k)}+\frac{a-kb}{3(1-k)}+\frac{a-kb}{3(1-k)}+\frac{p}{3}=$$
$$=\frac{c+a+p}{3(1-k)}-\frac{k(a+b+p)}{3(1-k)}=(g_2-kg)(1-k)=(g_2-g_1k)/(1-k)$$

unde g_1, g_2, g sunt afixele lui G_1, G_2, G. Cum G_1 şi G_2 sunt puncte fixe, rezultă că G descrie segmentul G_1G_2. Dar:

$$g_2-g_1=\frac{c-b}{3};$$

rezultă că segmentul G_1G_2 este paralel cu BC. Deci centrul de greutate al triunghiului MNP descrie un segment paralel cu BC.

Capitolul IX

PROBLEME DIVERSE

1. Fie $ABCD$ un patrulater convex şi pe AB fie $AM = MN = NB$ şi pe CD, $CP = PQ = QD$. Dacă $AC \cap BD = O$, atunci să se arate că:

$$\sigma[NOQ] = \sigma[MOP].$$

Soluţie. Fie a, b, c, d, m, n, p, q afixele punctelor A, B, C, D, M, N, P, Q şi alegem originea axelor în O.

Avem:

$$\frac{AM}{AB} = \frac{1}{3} \text{ sau } \frac{m-a}{b-a} = \frac{1}{3} \text{ de unde } m = \frac{2a+b}{3}.$$

În mod analog găsim:

$$n = \frac{2b+a}{3};\ p = \frac{2c+d}{3} \text{ şi } q = \frac{2d+c}{3}.$$

Deci:

$$\sigma[NOQ] = \frac{i}{4}\begin{vmatrix} n & \bar{n} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ q & \bar{q} & 1 \end{vmatrix} = \frac{i}{4}(n\bar{q} - \bar{n}q) = \frac{i}{4}\left(\frac{2b+a}{3}\cdot\frac{2\bar{d}+\bar{c}}{3} - \frac{2\bar{b}+\bar{a}}{3}\cdot\frac{2d+c}{3}\right).$$

Dacă ţinem cont că punctele A,O şi C sunt coliniare rezultă:

$$a\bar{c} = \bar{a}c$$

şi din faptul că B,O şi D sunt coliniare rezultă:

$$b\bar{d} = \bar{b}d;$$

atunci:

$$\sigma[NOQ] = \frac{i}{18}(b\bar{c} - \bar{b}c + a\bar{d} - \bar{a}d) \qquad (1).$$

La fel găsim că:

$$\sigma[MOP] = \frac{i}{4}\begin{vmatrix} m & \bar{m} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ p & \bar{p} & 1 \end{vmatrix} = \frac{i}{4}(m\bar{p} - \bar{m}p) = \frac{i}{18}(a\bar{d} - \bar{a}d + b\bar{c} - \bar{b}c).$$

Deci:

$$\sigma[NOQ] = \sigma[MOP].$$

2. Teorema lui Pappus

Produsul distanţelor unui punct oarecare de pe cerc la două laturi opuse ale unui patrulater înscris în acel cerc este egal cu produsul distanţelor acestui punct la celelalte două laturi opuse şi cu produsul distanţelor acestui punct la diagonalele patrulaterului.

Soluţie. Notăm afixele punctelor cu litere mici corespunzătoare. Fie d_1 distanţa de la M la AB, d_2 distanţa de la M la BC, d_3 distanţa de la M la CD, d_4 distanţa de la M la DA; d_5 distanţa de la M la AC şi d_6 distanţa de la M la BD.

Coeficientul unghiular complex al dreptei AB este: $\frac{a-b}{\bar{a}-\bar{b}} = -ab$ deoarece $a\bar{a} = b\bar{b} = c\bar{c} = d\bar{d} = m\bar{m} = 1$ = raza cercului circumscris patrulaterului $ABCD$.

Coeficientul dreptei perpendiculare pe AB va fi ab (coeficientul complex). Notând cu M_1 proiecţia lui M pe AB, pentru a afla afixul lui M_1 rezolvăm sistemul:

$$\begin{cases} Z + ab\bar{Z} = a + b & (1) \\ Z - m = ab(\bar{Z} - \bar{m}) & (2). \end{cases}$$

Adunând (1) cu (2) rezultă: $2Z = a + b + m - ab\bar{m}$ deci $m_1 = \frac{a+b+m-ab\bar{m}}{2}$

$$d_1 = |m - m_1| = \left|m - \frac{a+b+m-ab\bar{m}}{2}\right| = \left|\frac{m-(a+b)+ab\bar{m}}{2}\right| = \left|\frac{m^2-(a+b)m+ab}{2m}\right|$$

$$d_1 = \left|\frac{(m-a)(m-b)}{2m}\right|;$$

analog

$$d_2 = \left|\frac{(m-b)(m-c)}{2m}\right|;\ d_3 = \left|\frac{(m-c)(m-d)}{2m}\right|;$$

$$d_4 = \left|\frac{(m-d)(m-a)}{2m}\right|;\ d_5 = \left|\frac{(m-a)(m-c)}{2m}\right|;\ d_6 = \left|\frac{(m-b)(m-d)}{2m}\right|.$$

Se obţine imediat: $d_1d_3 = d_2d_4 = d_5d_6$ ceea ce trebuia demonstrat.

3. Dreapta care uneşte mijloacele diagonalelor unui patrulater circumscris unui cerc trece prin centrul cercului (*Newton*).

Soluţie. Alegem originea axelor în centrul cercului şi fie x_1, x_2, x_3, x_4 afixele punctelor de tangenţă E, F, G, H ale patrulaterului cu cercul, $E \in AB$, $F \in BC$, $G \in CD$, $H \in DA$. Atunci $x_1\bar{x}_1 = x_2\bar{x}_2 = x_3\bar{x}_3 = x_4\bar{x}_4 = 1$; fie K mijlocul segmentului EH, care se află pe dreapta OA care este bisectoarea triunghiului isoscel EAH. Cum bisectoarea este şi înălţime într-un triunghi isoscel, rezultă $EK \perp OA$. În triunghiul dreptunghic OEA, aplicând teorema catetei obţinem:

$$OE^2 = OK \cdot OA$$

sau în complex $1 = \frac{x_1 + x_4}{2} a$, de unde rezultă:

$$a = \frac{2}{x_1 + x_4}.$$

Analog se obține

$$b = \frac{2}{x_1 + x_2},\ c = \frac{2}{x_2 + x_3},\ d = \frac{2}{x_3 + x_4}.$$

Fie M și N mijloacele diagonalelor AC și BD, fie m, n afixele lui M și N

$$m = \frac{a + c}{2} = \frac{1}{x_1 + x_4} + \frac{1}{x_2 + x_3} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{(x_1 + x_4)(x_2 + x_3)} \tag{1}$$

$$n = \frac{b + d}{2} = \frac{1}{x_1 + x_2} + \frac{1}{x_3 + x_4} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{(x_1 + x_2)(x_3 + x_4)} \tag{2}.$$

Pentru ca punctele N, O, M să fie coliniare trebuie ca între afixele lor să existe relația: $\begin{vmatrix} m & \bar{m} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ n & \bar{n} & 1 \end{vmatrix} = 0$ sau dezvoltând rezultă $m\bar{n} = \bar{m}n$ (3).

Ținând seama de (1) și (2) trebuie să arătăm că:

$$(x_1 + x_4)(x_2 + x_3)(\bar{x}_1 + \bar{x}_2)(\bar{x}_3 + \bar{x}_4) = (\bar{x}_1 + \bar{x}_4)(\bar{x}_2 + \bar{x}_3)(x_1 + x_2)(x_3 + x_4) \tag{4}.$$

Relația (4) se verifică imediat dacă înlocuim $\bar{x}_i = \frac{1}{x_i}$; $i = 1, 2, 3, 4$ și aducând fracțiile a același numitor se obține (4) c.c.t.d.

4. Teoremele lui Menelaus și Newton-Gauss

Fie un triunghi ABC și $A' \in BC$, $B' \in CA$, $C' \in AB$; fie de asemenea A'', B'', C'' mijloacele segmentelor AA', BB', CC' și

$$\frac{A'B}{A'C} = u,\ \frac{B'C}{B'A} = v,\ \frac{C'A}{C'B} = w \tag{1}$$

Dacă punctele A', B', C' sunt coliniare atunci $uvw = 1$ (teorema lui Menelaus).

Soluție. Notând afixele punctelor cu litere mici corespunzătoare din (1) rezultă:

$$a' = \frac{b - uc}{1 - u},\ b' = \frac{c - va}{1 - v},\ c' = \frac{a - wb}{1 - w} \tag{2}$$

$$\sigma[A'B'C'] = \frac{i}{4}\begin{vmatrix} a' & \bar{a}' & 1 \\ b' & \bar{b}' & 1 \\ c' & \bar{c}' & 1 \end{vmatrix} = \frac{i}{4}\begin{vmatrix} \frac{b - uc}{1 - u} & \frac{\bar{b} - u\bar{c}}{1 - u} & 1 \\ \frac{c - va}{1 - v} & \frac{\bar{c} - v\bar{a}}{1 - v} & 1 \\ \frac{a - vb}{1 - w} & \frac{\bar{a} - w\bar{b}}{1 - w} & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{i}{4}\frac{1}{(1 - u)(1 - v)(1 - w)}\begin{vmatrix} b - uc & \bar{b} - u\bar{c} & 1 - u \\ c - va & \bar{c} - v\bar{a} & 1 - v \\ a - wb & \bar{a} - w\bar{b} & 1 - w \end{vmatrix} = \frac{i}{4}\frac{1}{(1 - u)(1 - v)(1 - w)} \times$$

$$\times \begin{vmatrix} 0 & 1 & -u \\ -v & 0 & 1 \\ 1 & -w & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a & \bar{a} & 1 \\ b & \bar{b} & 1 \\ c & \bar{c} & 1 \end{vmatrix}.$$

Rezultă:

$$\sigma[A'B'C'] = \frac{1 - uvw}{(1 - u)(1 - v)(1 - w)}\sigma[ABC].$$

Dacă A', B', C' sunt coliniare, atunci $\sigma[A'B'C'] = 0$ și din (3) rezultă $uvw = 1$.

Teorema Newton-Gauss

Mijloacele diagonalelor unui patrulater complet sunt coliniare.

Soluție. Avem

$$a'' = \frac{a + a'}{2},\ b'' = \frac{b + b'}{2},\ c'' = \frac{c + c'}{2} \tag{4}.$$

Din (2) și (4) rezultă:

$$a'' = \frac{a + b - u(c + a)}{2(1 - u)},\ b'' = \frac{b + c - v(a + b)}{2(1 - v)},\ c'' = \frac{c + a - w(b + c)}{2(1 - w)} \tag{4$_1$}$$

$$\sigma[A''B''C''] = \frac{i}{4}\begin{vmatrix} a'' & \bar{a}'' & 1 \\ b'' & \bar{b}'' & 1 \\ c'' & \bar{c}'' & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{32}\frac{1}{(1 - u)(1 - v)(1 - w)} \times$$

$$\times \begin{vmatrix} a + b - u(c + a) & \bar{a} + \bar{b} - u(\bar{c} + \bar{a}) & 2(1 - u) \\ b + c - v(a + b) & \bar{b} + \bar{c} - v(\bar{a} + \bar{b}) & 2(1 - v) \\ c + a - w(b + c) & \bar{c} + \bar{a} - w(\bar{b} + \bar{c}) & 2(1 - w) \end{vmatrix} \tag{5}$$

Dar

$$\begin{vmatrix} a+b-u(c+a) & \bar{a}+\bar{b}-u(\bar{c}+\bar{a}) & 2(1-u) \\ b+c-v(a+b) & \bar{b}+\bar{c}-v(\bar{a}+\bar{b}) & 2(1-v) \\ c+a-w(b+c) & \bar{c}+\bar{a}-w(\bar{b}+\bar{c}) & 2(1-w) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & -u \\ -v & 1 & 0 \\ 0 & -w & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a+b & \bar{a}+\bar{b} & 1 \\ b+c & \bar{b}+\bar{c} & 1 \\ c+a & \bar{c}+\bar{a} & 1 \end{vmatrix} \tag{6}$$

Determinantul

$$\begin{vmatrix} a+b & \bar{a}+\bar{b} & 1 \\ b+c & \bar{b}+\bar{c} & 1 \\ c+a & \bar{c}+\bar{a} & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a & \bar{a} & 1 \\ b & \bar{b} & 1 \\ c & \bar{c} & 1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a & \bar{a} & 1 \\ b & \bar{b} & 1 \\ c & \bar{c} & 1 \end{vmatrix} \tag{7}.$$

Din relaţiile (5), (6), (7) rezultă

$$\sigma[A''B''C''] = \frac{1-uvw}{2(1-u)(1-v)(1-w)} \times \sigma[ABC] \tag{8}.$$

Din relaţiile (3) şi (8) rezultă $2\sigma[A''B''C''] = \sigma[A'B'C']$ deci dacă $\sigma[A'B'C'] = 0$ rezultă $\sigma[A''B''C''] = 0$. Aşadar dacă punctele A', B', C' sunt coliniare, punctele A'', B'', C'' sunt coliniare; acestea din urmă sunt la rândul lor mijloacele diagonalelor patrulaterului complet $BCB'C'AA'$ care are diagonalele BB', CC', AA' şi, deci rezultă teorema *Newton-Gauss*. Reciproc, din teorema *Newton-Gauss* se obţine teorema lui *Menelaus* (ambele demonstraţii de *Marian Dincă*).

5. Triunghiul podar. Fie punctul M în planul triunghiului ABC şi M_1, M_2, M_3 proiecţiile sale pe laturile BC, CA, AB. Triunghiul $M_1M_2M_3$ este triunghiul podar al punctului M. Alegem originea în centrul cercului circumscris lui ABC şi notăm cu litere mici, corespunzătoare, afixele punctelor. Avem $a\bar{a} = b\bar{b} = c\bar{c} = 1$, luăm raza cercului = 1. De asemenea

$$2m_1 = m - bc\bar{m} + b + c \tag{9}$$

deci

$$2bc\bar{m}_1 = -m + bc\bar{m} + b + c \tag{10}$$

$$\sigma[M_1M_2M_3] = \frac{i}{4} \begin{vmatrix} m_1 & \bar{m}_1 & 1 \\ m_2 & \bar{m}_2 & 1 \\ m_3 & \bar{m}_3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{i}{4} \begin{vmatrix} m_2-m_1 & \bar{m}_2-\bar{m}_1 \\ m_3-m_1 & \bar{m}_3-\bar{m}_1 \end{vmatrix} \tag{11}.$$

Avem

$$2(m_2-m_1) = (a-b)(1-c\bar{m}) \tag{12}$$

$$2abc(\bar{m}_2-\bar{m}_1) = (a-b)(m-c) \tag{13}$$

$$2(m_3-m_1) = (a-c)(1-b\bar{m}) \tag{14}$$

şi

$$2abc(\bar{m}_3-\bar{m}_1) = (a-ç)(m-b) \tag{15}.$$

Dacă înlocuim în (11) relaţiile (12)-(15) obţinem:

$$\sigma[M_1M_2M_3] = \frac{i(a-b)(a-c)}{16abc} \begin{vmatrix} 1-c\bar{m} & m-c \\ 1-b\bar{m} & m-b \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{i(a-b)(a-c)(b-c)}{16abc}(1-m\bar{m}) \tag{16}.$$

Când punctul M este pe cerc avem $m\bar{m} = 1$ şi din (16) rezultă $\sigma[M_1M_2M_3] = 0$ deci punctele M_1, M_2, M_3 sunt coliniare, adică obţinem teorema lui Simson "*Proiecţiile unui punct M situat pe cercul circumscris pe laturile triunghiului sunt coliniare*".
Avem

$$\sigma[ABC] = \frac{i}{4} \begin{vmatrix} a & \bar{a} & 1 \\ b & \bar{b} & 1 \\ c & \bar{c} & 1 \end{vmatrix} = \frac{i}{4} \begin{vmatrix} a & \frac{1}{a} & 1 \\ b & \frac{1}{b} & 1 \\ c & \frac{1}{c} & 1 \end{vmatrix} = \frac{i(a-b)(b-c)(c-a)}{4abc} \tag{17}.$$

Din relaţiile (16) şi (17) rezultă

$$\sigma[M_1M_2M_3] = \sigma[ABC]\frac{1-m\bar{m}}{4}$$

sau

$$\sigma[M_1M_2M_3] = \sigma[ABC]\frac{R^2-OM^2}{4R^2} \quad \text{cum } OM^2 \geq 0$$

rezultă

$$\sigma[M_1M_2M_3] \leq \frac{1}{4}\sigma[ABC] \tag{18}.$$

6. Fie triunghiul AMB orientat în sens invers trigonometric şi asemenea cu triunghiul CDM orientat în sens trigonometric. Demonstraţi că dacă triunghiul ACX orientat în sens invers trigonometric şi triunghiul YDB orientat în sens invers trigonometric sunt asemenea cu primul triunghi, atunci ele au acelaşi centru al cercului circumscris.

(*The American Mathematical Monthly* - Dec. 1982, p. 756)

Solutie. Notăm afixele punctelor cu litere mici corespunzătoare. Alegem originea axelor în centrul cercului circumscris triunghiului ACX, având raza egală cu unitatea. Deci

$$a\bar{a} = c\bar{c} = x\bar{x} = 1 \tag{1}.$$

Deoarece triunghiul ACX este direct asemenea cu triunghiul AMB, invers asemenea cu triunghiul CMD şi direct asemenea cu triunghiul YDB, rezultă între afixe relaţiile:

$$\begin{vmatrix} a & a & 1 \\ m & c & 1 \\ b & x & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} c & \bar{a} & 1 \\ m & \bar{c} & 1 \\ d & \bar{x} & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} y & a & 1 \\ d & c & 1 \\ b & x & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Din primul determinant rezultă:

$$m = \frac{b(c-a) + a(x-c)}{x-a} \tag{2}.$$

Din al doilea determinant rezultă, ţinând seama de (2) şi simplificând

$$d = b\frac{(c-a)(\bar{x}-\bar{a})}{(\bar{c}-\bar{a})(x-a)} \tag{3}.$$

Din al treilea determinant, ţinând seama, de (3) rezultă:

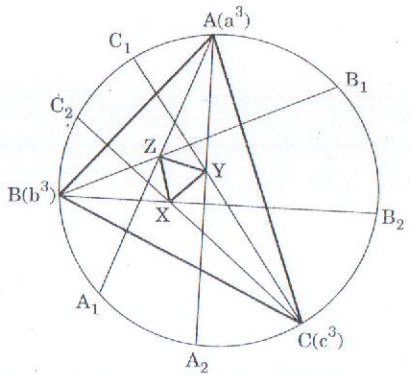
$$y = b\frac{(c-a)(\bar{x}-\bar{c})}{(\bar{c}-\bar{a})(x-c)} \tag{4}.$$

Din (3) şi (4) rezultă $y\bar{y} - d\bar{d} = b\bar{b}$; rezultă că originea se află în centrul cercului circumscris triunghiului YDB. Deci triunghiurile ACX şi YDB au acelaşi centru al cercurilor circumscrise.

Teorema lui Morley

În triunghiul ABC dreptele AY, AZ, BZ, BX, CX, CY împart unghiurile A, B, C în trei părţi egale. Să se arate că triunghiul XYZ este echilateral.

Soluţie. (datorată lui *H. Martyn Cundy* în "The Mathematical Gazette" volumul 68, nr. 444, pag. 112-114 anul 1984). Fie U cercul circumscris triunghiului ABC, fie $A_1 = AZ \cap U$, $A_2 = AX \cap U$, $B_1 = BX \cap U$, $B_2 = BZ \cap U$, $C_1 = CY \cap U$, $C_2 = CX \cap U$.



Alegem originea axelor planului complex în centrul cercului U. Fie a^3, b^3, c^3 afixele punctelor A, B, C unde a, b, c sunt numere complexe de modul egal cu unitatea.

Observăm că $\text{măs}\widehat{AC_1} = \frac{1}{3}\arg(b^3/a^3) = \arg(b/a)$, atunci afixul lui C_1 este egal cu $(b/a)a^3 = ba^2$; $\text{măs}\widehat{AC_2} = \frac{2}{3}\arg(b^3/a^3) = 2\arg(b/a) = \arg(b/a)^2$, atunci afixul lui C_2 este egal cu $(b/a)^2a^3 = b^2a$; $\text{măs}\widehat{BA_1} = \frac{1}{3}\arg(c^3/b^3) = \arg(c/b)$ deci afixul lui A_1 este $(c/b)^2b^3 = cb^2$; $\text{măs}\widehat{BA_2} = \frac{2}{3}\arg(c^3/b^3) = 2\arg(c/b) = \arg(c/b)^2$ deci afixul lui A_2 este egal cu $(c/b)^2\,b^3 = c^2b$; pentru afixele lui B_1 şi B_2 observăm că rotaţiei ce aduce OC în OA îi corespunde unghiul $2\pi + \sphericalangle COA$ care este egal cu $\arg(a^3/c^3)\varepsilon^3$ unde $\varepsilon = \cos(2\pi/3) + i\sin(2\pi/3)$ deci $\varepsilon^3 = 1$.

Măs $\widehat{B_1C} = \frac{1}{3}\arg((a^3/c^3)\varepsilon^3) = \arg((a/c)\varepsilon)$ deci afixul lui B_1 este $(a/c)\varepsilon c^3 = \varepsilon c^2a$, măs $\widehat{B_2C} = \frac{2}{3}\arg((a^3/c^3)\varepsilon^3) = 2\arg((a/c)\varepsilon)$ deci afixul lui B_2 este egal cu $(a/c)^2\,\varepsilon c^3 = \varepsilon^2ca^2$.

Ecuaţia dreptei ce trece prin punctele situate pe cerc de afixe u şi v este:

$$z + uv\bar{z} = u + v \tag{1}.$$

Dacă afixele punctelor X, Y, Z sunt x, y, z atunci ecuaţiile dreptelor ce trec prin X sunt:

$$x + ab^2c^3\bar{x} = ab^2 + c^3 \text{ şi respectiv } x + \varepsilon ab^3c^2\bar{x} = \varepsilon ac^2 + b^3.$$

Scăzând cele două ecuaţii şi împărţind prin $c - \varepsilon b$ şi apoi înmulţind cu a se obţine:

$$a^2b^2c^2\bar{x} = -\varepsilon a^2(c+b) + ac^2 + \varepsilon abc + \varepsilon ab^2 =$$
$$= \varepsilon^2(ab^2 - a^2b) + ac^2 - \varepsilon a^2c + \varepsilon abc.$$

Analog pentru Y se obţine

$$a^2b^2c^2\bar{y} = a^2b - ab^2 + bc^2 - b^2c + abc$$

şi pentru Z se obţine

$$a^2b^2c^2\bar{z} = a^2c - \varepsilon^2ac^2 + \varepsilon(b^2c - bc^2) + \varepsilon^2abc.$$

Se observă că $\bar{x} + \varepsilon^2\bar{y} + \varepsilon\bar{z} = 0$ de unde rezultă că $x + \varepsilon y + \varepsilon^2 z = 0$. Deci triunghiul XYZ este echilateral.

8. Cercurile celor nouă puncte ale celor patru triunghiuri formate din câte două laturi adiacente şi o diagonală ale unui patrulater inscriptibil, are un punct comun în punctul lui Mathot al patrulaterului.

(*Geometria elementelor remarcabile* - *C. Mihalescu* p. 81)

Soluţie de *Marian Dincă*. Fie A, B, C, D vârfurile patrulaterului inscriptibil şi a, b, c, d afixele corespunzătoare.

Fie (O) cercul circumscris patrulaterului. Avem:

$$a\bar{a} = b\bar{b} = c\bar{c} = d\bar{d} = R^2 \quad (1).$$

Atunci centrele cercurilor Euler ale triunghiurilor BCD, ACD, ABD şi ABC au afixele:

$$\frac{b+c+d}{2},\ \frac{a+c+d}{2},\ \frac{a+b+d}{2},\ \frac{a+b+c}{2}$$

razele acestor cercuri sunt egale cu $R/2$.

$$\left(Z - \frac{b+c+d}{2}\right)\left(\bar{Z} - \frac{\bar{b}+\bar{c}+\bar{d}}{2}\right) = \frac{R^2}{4} \quad (2)$$

$$\left(Z - \frac{a+c+d}{2}\right)\left(\bar{Z} - \frac{\bar{a}+\bar{c}+\bar{d}}{2}\right) = \frac{R^2}{4} \quad (3)$$

$$\left(Z - \frac{a+b+d}{2}\right)\left(\bar{Z} - \frac{\bar{a}+\bar{b}+\bar{d}}{2}\right) = \frac{R^2}{4} \quad (4)$$

$$\left(Z - \frac{a+b+c}{2}\right)\left(\bar{Z} - \frac{\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}}{2}\right) = \frac{R^2}{4} \quad (5)$$

Ecuaţiile (2), (3), (4), (5) se verifică pentru $z = \frac{a+b+c+d}{2}$ deci cercurile au punctul comun de afix $\frac{a+b+c+d}{2}$ = punctul lui Mathot.

9. Fie un poligon convex $A_1A_2,\ldots,A_n$ şi afixele vârfurilor $a_1, a_2,\ldots, a_n$. Atunci:

$$\text{aria } A_1A_2,\ldots,A_n = \frac{1}{2}\operatorname{Im}(a_1\bar{a}_2 + a_2\bar{a}_3 + \ldots + a_{n-1}\bar{a}_n + a_n\bar{a}_1).$$

Soluţie prin inducţie de *Marian Dincă*.

Pentru $n = 3$ avem:

$$\text{aria}(A_1A_2A_3) = \frac{i}{4}\begin{vmatrix} a_1 & \bar{a}_1 & 1 \\ a_2 & \bar{a}_2 & 1 \\ a_3 & \bar{a}_3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{i}{4}(a_1\bar{a}_2 - \bar{a}_1a_2 + a_2\bar{a}_3 - \bar{a}_2a_3 + a_3\bar{a}_1 - \bar{a}_3a_1) \quad (1).$$

Dar numerele $a_i\bar{a}_k$ şi $\bar{a}_ia_k$ sunt conjugate deci

$$a_i\bar{a}_k - \bar{a}_ia_k = -2\operatorname{Im}(a_i\bar{a}_k) \quad (2).$$

Din relaţiile (1) şi (2) rezultă:

$$\text{aria}(A_1A_2A_3) = \frac{1}{2}(\operatorname{Im}(a_1\bar{a}_2) + \operatorname{Im}(a_2\bar{a}_3) + \operatorname{Im}(a_3\bar{a}_1)) = \frac{1}{2}\operatorname{Im}(a_1\bar{a}_2 + a_2\bar{a}_3 + a_3\bar{a}_1)$$

deci pentru $n = 3$ se verifică.

Presupunem că formula se verifică pentru $n - 1$, deci:

$$\text{aria}(A_1A_2\ldots A_{n-1}) = \frac{1}{2}\operatorname{Im}(a_1\bar{a}_2 + a_2\bar{a}_3 + \ldots a_{n-1}\bar{a}_1) \quad (3).$$

Dar

$$\text{aria}(A_1A_2\ldots A_n) = \text{aria}(A_1A_2\ldots A_{n-1}) + \text{aria}(A_{n-1}A_nA_1) \quad (4).$$

Din relaţia (4) rezultă

$$\text{aria}(A_1A_2\ldots A_n) = \frac{1}{2}\operatorname{Im}(a_1\bar{a}_2 + a_2\bar{a}_3 + \ldots + .$$

$$+ a_{n-1}\bar{a}_1) + \frac{1}{2}\operatorname{Im}(a_{n-1}\bar{a}_2 + a_n\bar{a}_1 + a_1\bar{a}_{n-1}) \quad (5)$$

Dar numerele $a_{n-1}\bar{a}_1$ şi $\bar{a}_{n-1}a_1$ sunt conjugate, deci $\operatorname{Im}(a_{n-1}\bar{a}_1 + \bar{a}_{n-1}a_1) = 0$; rezultă că formula se verifică şi pentru n, atunci conform principiului inducţiei matematice se verifică pentru orice $n \geq 3$.

10. Teorema lui Menelaus

Fie un triunghi ABC şi o dreaptă care intersectează laturile AB, BC, CA în punctele M, N, P. Să se demonstreze că:

$$\frac{MA}{MB}\frac{NB}{NC}\frac{PC}{PA} = 1.$$

Soluţie. Fie

$$\frac{MA}{MB} = k_1,\ \frac{NB}{NC} = k_2,\ \frac{PC}{PA} = k_3 \quad (1).$$

Alegem originea în A şi fie afixele punctelor notate cu litere mici corespunzătoare. Din (1) rezultă:

$$m = \frac{-k_1b}{1-k_1},\ n = \frac{b-k_2c}{1-k_2},\ p = \frac{c}{1-k_3} \quad (2).$$

Punctele M, N, P sunt coliniare, deci $MP = k \cdot MN$, k = real, sau în complex se scrie:

$$p - m = k(n - m) \text{ sau } \frac{c}{1-k_3} + \frac{k_1b}{1-k_1} = k\left(\frac{b-k_2c}{1-k_2} + \frac{k_1b}{1-k_1}\right).$$

Egalând cu zero coeficienţii lui b şi c, deoarece altfel am avea o relaţie de forma $b = k_4c$, k_4 = număr real, aceasta ar însemna ca punctele A, B, C să fie coliniare.

Deci

$$\frac{1}{1-k_3} + \frac{kk_2}{1-k_2} = 0;\ \frac{k_1}{1-k_1} + \frac{kk_2}{1-k_1} - \frac{k}{1-k_2} = 0 \quad (3).$$

Eliminând pe k din relaţiile (3) rezultă $k_1k_2k_3 = 1$. Iată cum rezultă: din (3) obţinem

$$\frac{1}{1-k_3} = -\frac{kk_2}{1-k_2} \quad (4)$$

şi

$$\frac{k_1}{1-k_1} = k\left(\frac{k_1}{1-k_1} + \frac{1}{1-k_2}\right) \quad (5)$$

Împărţind (4) la (5) obţinem:

$$\frac{k_1(1-k_3)}{1-k_1} = \frac{k_1(1-k_2)+1-k_1}{-k_2(1-k_1)}$$

sau

$$-k_1k_2(1-k_3) = k_1 - k_1k_2 + 1 - k_1$$

sau

$$-k_1k_2 + k_1k_2k_3 = -k_1k_2 + 1,$$

de unde rezultă: $k_1k_2k_3 = 1$ c.c.t.d.

17. Dacă a, b, c, d, e, f sunt laturile respectiv diagonalele unui patrulater convex, atunci avem relațiile:

1) $e^2f^2 = e^2c^2 + b^2d^2 - 2abcd\cos(A + C)$

2) $\dfrac{e^2}{f^2} = \dfrac{a^2b^2 + c^2d^2 - 2abcd\cos(A + C)}{a^2d^2 + b^2c^2 - 2abcd\cos(B + D)}$

(*Marian Dincă*, G.M.B. nr. 10/1978 pag. 426-427).

Soluție. Fie un patrulater $ABCD$ și notăm cu z_1, z_2, z_3, z_4 afixele vârfurilor lui. Pentru aceste numere complexe avem relația lui Euler

$$(z_1 - z_2)(z_3 - z_4) + (z_1 - z_4)(z_2 - z_3) = (z_1 - z_3)(z_2 - z_4).$$

Înmulțind această relație cu conjugata ei membru cu membru și ținând cont că $(z_1 - z_3)(\overline{z}_1 - \overline{z}_3) = a^2$ și analoagele și de faptul că $z + \overline{z} = 2Re\,z$, $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z}_1 \cdot \overline{z}_2$, $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z}_1 + \overline{z}_2$ obținem:

$$a^2c^2 + b^2d^2 + (z_1 - z_2)(z_3 - z_4)(\overline{z}_1 - \overline{z}_4)(\overline{z}_2 - \overline{z}_3) + (\overline{z}_1 - \overline{z}_4)(\overline{z}_2 - \overline{z}_3)(z_1 - z_2)(z_3 - z_4) = e^2f^2 \tag{3}.$$

Dacă alegem ca axă reală pe DC, avem relațiile:

$$z_1 - z_4 = |z_1 - z_4|(\cos D + i\sin D) = d(\cos D + i\sin D);$$
$$z_1 - z_2 = |z_1 - z_2|(\cos(\pi - A - D) + i\sin(\pi - A - D))$$
$$z_2 - z_3 = |z_2 - z_3|(\cos(\pi - C) + i\sin(\pi - C))$$
$$z_3 - z_4 = |z_3 - z_4|(\cos\pi + i\sin\pi)$$

deoarece z_1z_4 face cu DC unghiul $\sphericalangle D$, z_1z_2 face cu DC unghiul $\pi - \sphericalangle A - \sphericalangle D$, z_2z_3 face cu DC unghiul $\sphericalangle C$ iar z_3z_4 face cu DC unghiul π.

Se obține imediat că

$$(z_1 - z_2)(z_3 - z_4)(\overline{z}_1 - \overline{z}_4)(\overline{z}_2 - \overline{z}_3) = -abcd[\cos(A + C) + i\sin(A + C)]$$

Se observă că numărul

$$(\overline{z}_1 - \overline{z}_2)(\overline{z}_3 - \overline{z}_4)(z_1 - z_4)(z_2 - z_3) = -abcd[\cos(A + C) - i\sin(A + C)].$$

Se observă că numărul $(z_1 - z_2)(z_3 - z_4)(\overline{z}_1 - \overline{z}_4)(\overline{z}_2 - \overline{z}_3)$ este conjugatul numărului $(\overline{z}_1 - \overline{z}_4)(\overline{z}_2 - \overline{z}_3)(z_1 - z_2)(z_3 - z_4)$ și atunci relația (3) devine:

$$e^2f^2 = a^2c^2 + b^2d^2 - 2\,abcd\cos(A + C)$$

adică relația (1).

Pentru a demonstra relația (2) se pornește de la egalitatea

$$\frac{(z_2 - z_1)(z_2 - z_3) - (z_4 - z_1)(z_4 - z_3)}{(z_1 - z_2)(z_1 - z_4) - (z_3 - z_2)(z_3 - z_4)} = \frac{z_2 - z_4}{z_3 - z_1}$$

care înmulțită cu conjugata ei și urmând același raționament ca la punctul (1) se obține relația (2).

Comentarii:

a) În cazul particular când $A + C = B = D = \pi$, obținem relațiile lui Ptolemeu pentru patrulaterul inscriptibil și anume:

$$ef = ac + bd \tag{4}$$

$$\frac{e}{f} = \frac{ab + cd}{ad + bc} \tag{5}.$$

b) Observăm că

$$\cos(A + C) = \cos\frac{2A + 2C}{2} = \cos\frac{A + C + 2\pi - B - D}{2} =$$
$$= \cos\left(\pi + \frac{A - B + C - D}{2}\right) = -\cos\frac{A - B + C - D}{2}$$

și relația (1) devine:

$$e^2f^2 = a^2c^2 + b^2d^2 + 2abcd\cos\frac{A - B + C - D}{2} \tag{6}.$$

c) În cazul particular când $A + C = \dfrac{\pi}{2}$ sau $B + D = \dfrac{\pi}{2}$ atunci relațiile devin

$$e^2f^2 = a^2c^2 + d^2b^2 \tag{7}$$

și

$$\frac{e^2}{f^2} = \frac{a^2b^2 + c^2d^2}{a^2d^2 + b^2c^2} \tag{8}.$$

18. Fie $\omega = -1/2 + i\sqrt{3}/2$ și a, b, c trei numere complexe date. Se consideră sistemul:

$$x + y + z = a$$
$$x + \omega y + \omega^2 z = b$$
$$x + \omega^2 y + \omega z = c$$

1) Să se rezolve sistemul.

2) Să se determine condiția necesară și suficientă ca x, y și z să fie reale.

(*Propusă pentru O.I.M.*)

Soluție. 1) Observăm că $1 + \omega + \omega^2 = 0$ și $\omega^3 = 1$ și deci adunând ecuațiile obținem $x = \dfrac{a + b + c}{3}$. Înmulțind ecuația a doua cu ω^2 și a treia cu ω și adunând apoi cele trei ecuații obținem:

$$y = \frac{a + b\omega^2 + \omega}{3}.$$

În mod analog obținem $z = \dfrac{a + b\omega + c\omega^2}{3}$.

2) Dacă $x, y, z \in \mathbf{R}$, ecuația (1) ne arată că $a \in \mathbf{R}$, iar din (2) și (3) și b și c sunt complex conjugate.

Reciproc, dacă $a \in \mathbf{R}$ iar b și c sunt complex conjugate, atunci $b + c \in \mathbf{R}$ deci $x \in \mathbf{R}$, $\overline{b\omega} = c\omega^2$ și $\overline{b\omega^2} = c\omega$ (deoarece $\overline{\omega}^2 = \omega$). Deci $b\omega + c\omega^2$ și $b\omega^2 + c\omega$ sunt numere reale și deci $y, z \in \mathbf{R}$. Deci condiția necesară și suficientă ca x, $y, z \in \mathbf{R}$ este ca $a \in \mathbf{R}$ iar b și c să fie complex conjugate.

19. Fie G_n mulțimea rădăcinilor unității de ordinul n. Să se arate că:

$$\prod_{\omega \in G_n}\left(\omega+\frac{1}{\omega}\right)=\begin{cases}0 & \text{dacă } n\equiv 0(\text{mod}4)\\ 2 & \text{dacă } n\equiv 1(\text{mod}4) \text{ sau } n\equiv 3(\text{mod}4)\\ -4 & \text{dacă } n\equiv 2(\text{mod}4)\end{cases}$$

(Marcel Țena - G.M.A.)

Soluție. Să considerăm polinomul $P(X) = X^n - 1$, a cărei mulțime de rădăcini este tocmai G_n. Atunci folosind descompunerea în factori liniari precum și din relațiile lui Viète, putem scrie respectiv egalitățile:

$$P(X) = \prod_{\omega \in G_n}(X-\omega) \tag{1}$$

$$\prod_{\omega \in G_n}\omega = (-1)^{n-1} \tag{2}.$$

Atunci

$$E = \prod_{\omega \in G_n}\left(\omega+\frac{1}{\omega}\right)=\frac{\prod_{\omega \in G_n}(\omega^2+1)}{\prod_{\omega \in G_n}\omega}=\frac{\prod_{\omega \in G_n}(\omega+i)(\omega-i)}{(-1)^{n-1}} =$$

$$=(-1)^{n-1}\prod_{\omega \in G_n}(\omega+i)\prod_{\omega \in G_n}(\omega-i)=(-1)^{n-1}(-1)^{2n}\prod_{\omega \in G_n}(-i-\omega)\prod_{\omega \in G_n}(i-\omega)=$$

$$=(-1)^{n-1}P(-i)P(i)=(-1)^{n-1}[(-i)^n-1][i^n-1].$$

Pentru $n \equiv 0 \pmod 4 \Leftrightarrow n = 4k$ avem:

$$E=(-1)^{4k-1}[(-i)^{4k}-1][i^{4k}-1]=-1(1-1)(1-i)=0.$$

Pentru $n \equiv 1 \pmod 4 \Leftrightarrow n = 4k+1$, avem:

$$E=(-1)^{4k-2}[(-i)^{4k-1}-1][i^{4k-1}-1]=(-i-1)(-i+1)=(-i)^2-i^2=2.$$

Pentru $n \equiv 2 \pmod 4 \Leftrightarrow n = 4k+2$, avem:

$$E=(-1)^{4k-3}[(-i)^{4k-2}-1][i^{4k-2}-1]=-(-1-1)(-1-1)=-4.$$

Pentru $n \equiv 3 \pmod 4 \Leftrightarrow n = 4k+3$ avem:

$$E=(-1)^{4k-4}[(-i)^{4k-3}-1][i^{4k-3}-1]=(i-1)(-i-1)=(-1)^2-i^2=2.$$

20. Într-un triunghi ABC în care A', B', C' sunt mijloacele laturilor BC, CA, AB și A_1, B_1, C_1 picioarele înălțimilor pe aceste laturi, centrele de greutate G, G_a, G_b, G_c ale triunghiurilor ABC, $A_1B'C'$, $B_1C'A'$, $C_1A'B'$ sunt pe un cerc concentric cu cercul celor nouă puncte (O_9) și triunghiul $G_aG_bG_c$ este asemenea cu ABC.

(Victor Thébault)

Soluție. Notăm afixele punctelor cu litere mici corespunzătoare, luăm raza cercului circumscris triunghiului ABC egală cu unitatea, pentru a simplifica calculele.

Ecuația dreptei AA_1 în planul complex se va scrie:

$$Z-a=-\frac{b-c}{\bar{b}-\bar{c}}(\bar{Z}-\bar{a}) \text{ sau } Z-a=bc(\bar{Z}-\bar{a})$$

sau

$$Z-bc\bar{Z}=a-bc\bar{a} \tag{1}.$$

Ecuația dreptei BC se va scrie:

$$Z+bc\bar{Z}=b+c \tag{2}$$

din (1) și (2) rezultă:

$$Z=\frac{a+b+c-bc\bar{a}}{2}=a_1 \tag{3}.$$

Analog

$$b_1=\frac{a+b+c-ca\bar{b}}{2} \text{ și } c_1=\frac{a+b+c-ab\bar{c}}{2} \tag{4}$$

$$a'=\frac{b+c}{2},\ b'=\frac{c+a}{2},\ c'=\frac{a+b}{2} \tag{5}$$

$$g=\frac{a+b+c}{3},\ g_a=\frac{a_1+b'+c'}{3}=\frac{\frac{a+b+c-bc\bar{a}}{2}+\frac{c+a}{2}+\frac{a+b}{2}}{3}=$$

$$=\frac{3a+2b+2c-bc\bar{a}}{6}=\frac{a+b+c}{3}+\frac{a-bc\bar{a}}{6} \tag{6}.$$

Se știe că afixul centrului lui (O_9) este $\frac{a+b+c}{2}$. Calculăm

$$\left(g_a-\frac{a+b+c}{2}\right)\left(\bar{g}_a-\frac{\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}}{2}\right)=$$

$$=\left(\frac{a+b+c}{3}+\frac{a-bc\bar{a}}{6}-\frac{a+b+c}{2}\right)\left(\frac{\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}}{3}+\frac{\bar{a}-\bar{b}\bar{c}a}{6}-\frac{\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}}{2}\right)=$$

$$=\left(\frac{a-bc\bar{a}}{6}-\frac{a+b+c}{6}\right)\left(\frac{\bar{a}-\bar{b}\bar{c}a}{6}-\frac{\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}}{6}\right)-\left(\frac{bc\bar{a}+b+c}{6}\right)\left(\frac{\bar{b}\bar{c}a+\bar{b}+\bar{c}}{6}\right)=$$

$$=\left(\frac{bc\bar{a}+b+c}{6bc}\right)bc\left(\frac{\bar{b}\bar{c}a+\bar{b}+\bar{c}}{6}\right)=\left(\frac{\bar{a}+\bar{c}+\bar{b}}{6}\right)\left(\frac{a+c+b}{6}\right)-\bar{p}p=$$

$$=|p|^2\in\mathbb{R}\quad,\quad p=\frac{a+c+b}{6}.$$

Analog

$$\left(g_b-\frac{a+b+c}{2}\right)\left(\bar{g}_b-\frac{\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}}{2}\right)=\frac{\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}}{6}\cdot\frac{a+b+c}{6}=\bar{p}\cdot p=|p|^2$$

$$\left(g_c-\frac{a+b+c}{2}\right)\left(\bar{g}_c-\frac{\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}}{2}\right)=\frac{\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}}{6}\cdot\frac{a+b+c}{6}=\bar{p}\cdot p=|p|^2.$$

Deci G_a, G_b, G_c se află în același cerc cu centrul în O_9 și rază $= |p|$.
De asemenea

$$\left(g-\frac{a+b+c}{2}\right)\left(\bar{g}-\frac{\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}}{2}\right)=\left(\frac{a+b+c}{3}-\frac{a+b+c}{2}\right)\left(\frac{\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}}{3}-\frac{\bar{a}+\bar{b}+c}{2}\right)=$$

$$=\left(-\frac{a+b+c}{6}\right)\left(-\frac{\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}}{6}\right)=p\cdot\bar{p}=|p|^2$$

deci şi G se află pe acelaşi cerc de centru O_9 şi rază $|p|$.

Pentru a arăta că $\Delta G_aG_bG_c \sim \Delta ABC$ este necesar şi suficient să demonstrăm că:

$$\frac{g_c-g_a}{g_b-g_a}=\frac{c-a}{b-a}$$

$$\frac{g_c-g_a}{g_b-g_a}=\frac{\frac{a+b+c}{3}+\frac{c-ab\bar{c}}{6}-\frac{a+b+c}{3}-\frac{a-bc\bar{a}}{6}}{\frac{a+b+c}{3}+\frac{b-ac\bar{b}}{6}-\frac{a+b+c}{3}-\frac{a-bc\bar{a}}{6}}=\frac{c-ab\bar{c}-a+bc\bar{a}}{b-ac\bar{b}-a+bc\bar{a}}=$$

$$=\frac{c-a+b(\bar{a}c-a\bar{c})}{b-a+c(\bar{a}b-a\bar{b})}=\frac{c-a+b(\frac{c}{a}-\frac{a}{c})}{b-a+c\left(\frac{b}{a}-\frac{a}{b}\right)}=\frac{(c-a)(ac+bc+ab)}{(b-a)(ab+bc+ca)}=\frac{c-a}{b-a}$$

c.c.t.d.

20. Fie ABC un triunghi oarecare. Pe semidreptele $[AB$ şi $[AC$ se consideră punctele A' şi A'' astfel încât $BA'=BC=CA''$. Punctul A''' este mijlocul segmentului $[A'A'']$ iar B''' şi C''' sunt punctele obţinute analog.

Triunghiul ABC este înscris în triunghiul $A'''B'''C'''$ (adică $A\in[B'''C'''$], $B\in[C'''A'''$], $C\in[A'''B'''$].

(Constantin Cocea, Iaşi)

Soluţie de *Marian Dincă*. Notăm afixele punctelor cu litere mici corespunzătoare.

Segmentului BA' se obţine din segmentul BC printr-o rotaţie de unghi de măsură egală cu $180^\circ - \sphericalangle B$, care în planul complex se va scrie (ţinând seama că rotaţia este în sens invers trigonometric):

$$a'-b=(c-b)[\cos(B-\pi)+i\sin(B-\pi)]=(c-b)e^{i(B-\pi)} \quad (1).$$

Segmentul CA'' se obţine din segmentul BC printr-o rotaţie de unghi de măsură $180^\circ - \sphericalangle C$, care în planul complex se va scrie:

$$a''-c=(b-c)[\cos(\pi-C)+i\sin(\pi-C)]=(b-c)e^{i(\pi-C)} \quad (2)$$

dar

$$a'''=\frac{a'+a''}{2}=\frac{b+(c-b)e^{i(B-\pi)}+c+(b-c)e^{i(\pi-C)}}{2} \quad (3).$$

Analog obţinem relaţiile:

$$b'-c=(a-c)e^{i(C-\pi)} \text{ şi } b''-a=(c-a)e^{i(\pi-A)} \quad (4)$$

$$b'''=\frac{b'+b''}{2}=\frac{c+(a-c)e^{i(C-\pi)}+a+(c-a)e^{i(\pi-A)}}{2} \quad (5).$$

Calculăm

$$\arg\frac{c-b'''}{c-a'''}=\arg\left\{\frac{(c-a)[-e^{i(\pi-A)}+e^{i(C-\pi)}+1]}{(c-b)[-e^{i(B-\pi)}+e^{i(\pi-C)}+1]}\right\} \quad (6)$$

$$-\arg\left(\frac{c-a}{c-b}\right)+\arg\left(\frac{-e^{i(\pi-A)}+e^{i(C-\pi)}+1}{-e^{i(B-\pi)}+e^{i(\pi-C)}+1}\right)=(\pi-C)+(C-\pi)=0 \quad (7)$$

deoarece $\frac{-e^{i(\pi-A)}+e^{i(C-\pi)}-1}{-e^{i(B-\pi)}+e^{i(\pi-C)}+1}=e^{i(C-\pi)}$.

Din (7) rezultă $\arg\frac{c-b'''}{c-a'''}=0=\sphericalangle B'''CA'''$ deci A'''; C; B''' sunt coliniare. Analog pentru celelalte funcţii.

21. Dacă: $f(x)=\cos(a_1+x)+\frac{1}{2}\cos(a_2+x)+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}\cos(a_n+x)$ unde a_1, a_2, ..., a_n sunt constante reale şi $f(x_1)=f(x_2)=0$ atunci $x_1-x_2=n\pi$, $n\in\mathbf{Z}$.

Soluţie. Fie

$$g(x)=\sin(a_1+x)+\frac{1}{2}\sin(a_2+x)+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}\sin(a_n+x).$$

$$f(x)+ig(x)=\cos(a_1+x)+i\sin(a_1+x)+\frac{1}{2}[\cos(a_2+x)+i\sin(a_2+x)]+$$

$$+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}[\cos(a_n+x)+i\sin(a_n+x)]=(\cos x+i\sin x)[\cos a_1+i\sin a_1+$$

$$+\frac{1}{2}(\cos a_2+i\sin a_2)+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}(\cos a_n+i\sin a_n)$$

fie $\sum_{k=1}^{n}(\cos a_k+i\sin a_k)\frac{1}{2^{k-1}}=r(\cos\alpha+i\sin\alpha)$ deci:

$$f(x)+ig(x)=(\cos x+i\sin x)\cdot r\cdot(\cos\alpha+i\sin\alpha)=r[\cos(\alpha+x)+i\sin(\alpha+x)];$$

rezultă

$$f(x)=r\cos(\alpha+x),\ g(x)=r\sin(\alpha+x)$$

$$f(x_1)=0\Rightarrow r\cos(\alpha+x_1)=0\Rightarrow\cos(\alpha+x_1)=0\Rightarrow\alpha+x_1=(2k+1)\frac{\pi}{2}$$

$$f(x_2)=0\Rightarrow r\cos(\alpha+x_2)=0\Rightarrow\cos(\alpha+x_2)=0\ \alpha+x_2=(2p+1)\frac{\pi}{2}$$

deci

$$(\alpha+x_1)-(\alpha+x_2)=(2k+1)\frac{\pi}{2}-(2p+1)\frac{\pi}{2},\ k,p\in\mathbf{Z}$$

sau

$$x_1-x_2=(k-p)\pi=n\pi,\ k-p=n\in\mathbf{Z}\ \text{c.c.t.d.}$$

22. Fie $A_1A_2...A_n$ un poligon înscris în cercul unitate de centru O şi având centrul de greutate tot în O. Să se arate că dacă M este un punct oarecare din plan avem:

$$\sum_{i=1}^{n} A_iM \geq n .$$

Soluţie. Vom nota prin Z_i respectiv Z coordonatele complexe ale lui A_i respectiv M faţă de O şi atunci $\sum_{i=1}^{n} Z_i = O$, $|Z_i| = 1$, $Z_i^{-1} = \bar{Z}_i$, unde $i \in \{1, 2, ..., n\}$. Avem

$$\sum_{i=1}^{n} |Z - Z_i| \geq |nZ - \sum_{i=1}^{n} Z_i| = n|Z| \qquad (1)$$

deci pentru $|Z| \geq 1$ problema este rezolvată.

Pentru $Z = 0$ este evident.

Fie $0 < Z < 1$. Atunci avem:

$$\sum_{i=1}^{n} \bar{Z}_i = 0 \text{ şi } |Z^{-1} - Z_i^{-1}| = |Z - Z_i||Z^{-1}| .$$

Scriind pentru Z^{-1} relaţia (1) avem

$$\sum_{i=1}^{n} |Z^{-1} - Z_i^{-1}| \geq n|Z^{-1}| \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} |Z - Z_i||Z^{-1}| \geq n|Z^{-1}| \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} |Z - Z_i| \geq n .$$

În [10] avem transpusă vectorial soluţia dată în numere complexe.

23. Fie ABC şi $A'B'C'$ două triunghiuri oarecare la fel orientate şi asemenea. Centrele de greutate ale patrulaterelor $BCB'C'$, $CAA'C'$ şi $ABA'B'$ formează un triunghi asemenea cu triunghiul ABC.

(Marian Dincă)

Soluţie. Notăm afixele punctelor cu litere mici corespunzătoare. $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C' \Leftrightarrow a' = pa + q$, $b' = pb + q$, $c' = pc + q$ unde $p, q \in \mathbf{C}$. Notând centrele de greutate ale patrulaterelor $BCB'C'$, $CAA'C'$ şi $ABA'B'$ cu G_1, G_2, G_3, vom avea:

$$g_1 = \frac{b + c + b' + c'}{4} = \frac{b + c + pb + q + pc + q}{4} = \frac{(p+1)}{4}b + \frac{(p+1)}{4}c + \frac{q}{2}$$

$$g_2 = \frac{c + a + c' + a'}{4} = \frac{c + a + pc + q + pa + q}{4} = \frac{(p+1)}{4}a + \frac{(p+1)}{4}c + \frac{q}{2}$$

$$g_3 = \frac{a + b + a' + b'}{4} = \frac{a + b + pa + q + pb + q}{4} = \frac{(p+1)}{4}a + \frac{(p+1)}{4}b + \frac{q}{2}.$$

Pentru a arăta că $\Delta G_1G_2G_3 \sim \Delta ABC$ va trebui ca determinantul

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ g_1 & g_2 & g_3 \end{vmatrix} = 0$$

sau

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ \frac{(p+1)}{4}b + \frac{(p+1)}{4}c + \frac{q}{2} & \frac{(p+1)}{4}a + \frac{(p+1)}{4}c + \frac{1}{2} & \frac{(p+1)}{4}a + \frac{(p+1)}{4}b + \frac{q}{2} \end{vmatrix} = 0$$

dezvoltăm determinantul după prima linie şi obţinem:

$$\frac{(p+1)}{4}(a+b)b + \frac{qb}{2} - \frac{(p+1)}{4}(a+c)c - \frac{qc}{2} - \frac{(p+1)}{4}(a+b)a +$$

$$+ \frac{(p+1)}{4}(b+c)c + \frac{qc}{2} - \frac{qa}{2} + \frac{(p+1)}{4}(a+c)a + \frac{qa}{2} - \frac{(p+1)}{4}(b+c)b - \frac{qb}{2} =$$

$$= \frac{(p+1)}{4}[(a+b)b - (a+c)c - (a+b)a + (b+c)c + (a+c)a - (b+c)b] =$$

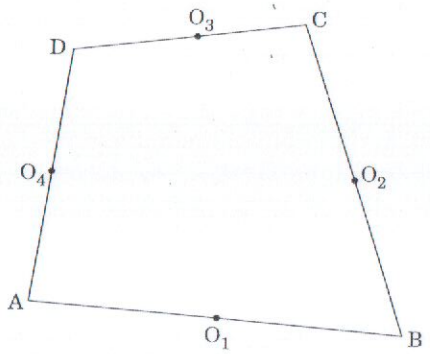
$$= \frac{(p+1)}{4}[ab + b^2 - ac - c^2 - a^2 - ab + bc + c^2 + a^2 + ac - b^2 - bc] = \frac{p+1}{4} \cdot 0 = 0$$

c.c.t.d.

23. Fie $ABCD$ un patrulater convex. Cercurile de diametru AB respectiv CD sunt tangente, de asemenea cercurile de diametru AD respectiv BC sunt tangente. Să se demonstreze că patrulaterul $ABCD$ este pătrat.

(Laurenţiu Panaitopol)

Soluţie de *Marian Dincă*: Notăm afixele punctelor cu litere mici corespunzătoare. Două cercuri sunt tangente exterior dacă distanţa dintre centrele lor este egală cu suma razelor. Notăm pe figură centrele cercurilor cu O_1, O_2, O_3, O_4.



Vom avea relaţiile:

$$O_1O_3 = r_1 + r_3 \text{ sau } \left|\frac{a+b}{2} - \frac{c+d}{2}\right| = \left|\frac{a-b}{2}\right| + \left|\frac{c-d}{2}\right| \quad (1)$$

$$O_2O_4 = r_2 + r_4 \text{ sau } \left|\frac{a+d}{2} - \frac{b+c}{2}\right| = \left|\frac{a-d}{2}\right| + \left|\frac{b-c}{2}\right| \quad (2)$$

Relaţiile (1) şi (2) se mai scriu:

$$|a-d+b-c| = |a-b| + |c-d| \quad (3)$$

$$|a-b+d-c| = |a-d| + |b-c| \quad (4).$$

Deoarece $|z_1+z_2| \le |z_1| + |z_2|$ din relaţiile (3) şi (4) rezultă:

$$|a-d+b-c| = |a-b| + |c-d| \ge |a-b+d-c|\ ;\ (|c-d| = |d-c|) \quad (5)$$

şi

$$|a-b+d-c| = |a-d| + |b-c| \ge |a-d+b-c| \quad (6)$$

deci

$$|a-d+b-c| \ge |a-b+d-c| \ge |a-d+b-c|\ ;$$

rezultă că:

$$|a-d+b-c| = |a-b+d-c| \quad (7).$$

Din relaţiile (3), (4), (7) rezultă:

$$|a-b+d-c| = |a-b| + |d-c| \quad (8)$$

şi

$$|a-d+b-c| = |a-d| + |b-c| \quad (9).$$

Dar $|z_1+z_2| = |z_1| + |z_2|$ dacă şi numai dacă $z_1 = \lambda z_2$, $\lambda \in \mathbf{R}_+$ şi deci din (8) şi (9) rezultă: $a-b = \lambda(d-c)$, $\lambda \in \mathbf{R}_+$, deci $AB \parallel CD$ şi $a-d = \mu(b-c)$, $\mu \in \mathbf{R}_+$ deci $AD \parallel BC$; rezută $ABCD$ paralelogram. Din relaţia (7) rezultă $O_1O_3 = O_2O_4$, pe de altă parte $O_1O_2O_3O_4$ este paralelogram şi având diagonalele egale va fi pătrat. Cum $O_3O_4 = \frac{AC}{2} = O_1O_2 = \frac{BD}{2} = O_2O_3 = O_1O_4$ rezultă că $AC = BD$ deci $ABCD$ este pătrat.

24. Să se arate că dacă:

$$a_0 + a_1\cos x + a_2\cos 2x + \ldots + a_n\cos nx = 0$$

pentru orice $x \in \mathbf{R}$ atunci $a_0 = a_1 = \ldots = a_n = 0$.

Soluţie. Fie $g: \mathbf{R} \to A$, $g(x) = \cos x + i\sin x$, unde $A = \{z \in \mathbf{C}, |z| = 1\}$. Funcţia g este surjectivă. Dacă $z = \cos x + i\sin x$ atunci $\bar{z} = \cos x - i\sin x$ şi rezultă $2\cos x = z + \bar{z}$ sau $2\cos x = z + z^{-1}$ şi, în general, $2\cos kx = z^k + z^{-k}$, $(\forall)\ k \in \mathbf{N}$. Rezultă că:

$$2f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} 2a_k\cos kx = \sum_{k=0}^{n} a_k(z^k + z^{-k})$$

$$f_n(x) = 0\ ,\ (\forall)x \in \mathrm{R} \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n} a_k(z^k + z^{-k}) = 0\ ,\ (\forall), z \in \mathrm{C}, |z| = 1$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n} a_k(z^{n-k} + z^{n-k}) = 0\ ,\ (\forall), z \in \mathbb{C} \text{ cu } |z| = 1.$$

Polinomul

$$a_n z^{2n} + a_{n-1}z^{2n-1} + \ldots + a_2 z^{n-2} + a_1 z^{n-1} + 2a_0 z^n + \ldots + a_{n-1}z + a_n = 0$$

$(\forall), z \in \mathbf{C}$, $|z| = 1$, de unde rezultă că $a_0 = a_1 = \ldots = a_n = 0$.

Într-adevăr

$$0 = \left|\sum a_n z^{2n} + a_{n-1} - z^{2n-1} + \ldots + a_n\right| \ge |a_n| + |a_{n-1}|$$

deci $|a_k| = 0 \Rightarrow a_k = 0$.

25. Se consideră numerele:

$$a_n = 1 - C_n^3 + C_n^6 - \ldots,\ b_n = -C_n^1 + C_n^4 + C_n^7 + \ldots,\ c_n = C_n^2 - C_n^5 + C_n^8 - \ldots$$

Arătaţi că pentru $n \ge 2$, $a_n^2 + b_n^2 + c_n^2 - a_nb_n - b_nc_n - c_na_n = 3^n$.

Soluţie. Fie $\varepsilon \in \mathbf{C}$, $\varepsilon^3 = -1$. Notăm cu $S_n = a_n^2 + b_n^2 + c_n^2 - a_nb_n - b_nc_n - c_na_n$. Prin calcul imediat obţinem

$$S_n = (a_n - \varepsilon b_n\varepsilon^2 c_n)(a_n - \bar{\varepsilon}b_n + \bar{\varepsilon}^2 c_n).$$

Dar

$$a_n - \varepsilon b_n + \varepsilon^2 c_n = (1+\varepsilon)^n$$

$$a_n - \bar{\varepsilon}b_n + \bar{\varepsilon}^2 c_n = (1+\bar{\varepsilon})^n.$$

Deci

$$S_n = (1+\varepsilon)^n(1+\bar{\varepsilon})^n = (1+\varepsilon+\bar{\varepsilon}+\varepsilon\bar{\varepsilon})^n = 3^n.$$

Capitolul X

APLICAŢIILE NUMERELOR COMPLEXE ÎN TRIGONOMETRIE

Fie Z un număr complex de modul 1, adică:

$$Z = \cos\alpha + i\sin\alpha.$$

Atunci

$$\bar{Z} = \cos\alpha - i\sin\alpha$$

$$Z\cdot\bar{Z} = 1,\quad Z+\bar{Z} = 2\cos\alpha,\quad Z-\bar{Z} = 2i\sin\alpha \tag{1}$$

Din (1) deducem:

$$\cos\alpha = \frac{Z^2+1}{2Z};\ \sin\alpha = \frac{Z^2-1}{2iZ};\ \operatorname{tg}\alpha = \frac{Z^2-1}{i(Z^2+1)} \tag{2}$$

Din formula lui Moivre se obţine:

$$Z_n = \cos n\alpha + i\sin n\alpha \text{ şi } \frac{1}{Z^n} = \cos n\alpha - i\sin n\alpha$$

şi rezultă că:

$$\cos n\alpha = \frac{Z^{2n}+1}{2Z^n};\ \sin n\alpha = \frac{Z^{2n}+1}{2iZ^n};\ \operatorname{tg} n\alpha = \frac{Z^{2n}-1}{i(Z^{2n}+1)} \tag{3}$$

Dacă considerăm două numere complexe de modul 1 adică:

$$a = \cos\alpha + i\sin\alpha$$

$$b = \cos\beta + i\sin\beta$$

se observă că:

$$a\cdot b = \cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)$$

$$\bar{a}\cdot\bar{b} = \cos(\alpha+\beta) - i\sin(\alpha+\beta)$$

din care rezultă:

$$\cos(\alpha+\beta) = \frac{a^2b^2+1}{2ab};\ \sin(\alpha+\beta) = \frac{a^2b^2-1}{2iab}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{a^2b^2-1}{i(a^2b^2+1)} \tag{4}$$

În mod analog din:

$$\frac{a}{b} = \cos(\alpha-\beta) + i\sin(\alpha-\beta)$$

şi

$$\overline{\left(\frac{a}{b}\right)} = \frac{b}{a} = \cos(\alpha-\beta) - i\sin(\alpha-\beta);$$

rezultă:

$$\cos(\alpha-\beta) = \frac{a^2+b^2}{2ab};\ \sin(\alpha-\beta) = \frac{a^2-b^2}{2iab}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \frac{a^2-b^2}{i(a^2+b^2)} \tag{5}$$

Dacă considerăm scrierea exponenţială a numerelor complexe:
$e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha$ (e fiind baza funcţiei exponenţiale)
$e^{-i\alpha} = \cos\alpha - i\sin\alpha$ deducem:

$$\cos\alpha = \frac{e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}}{2};\ \sin\alpha = \frac{e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}}{2i}.$$

formule care se mai numesc formulele lui Euler.

În cadrul acestui capitol putem da următoarele aplicaţii:

I. Liniarizarea polinoamelor trigonometrice

Fie: $U = \{Z/Z\in\mathbf{C},\ |Z| = 1\}$ şi să considerăm o funcţie:

$$f: U\to\mathbf{C};\ f(Z) = f\left(Z+\frac{1}{Z}\right)^m\left(Z-\frac{1}{Z}\right)^n;$$

se observă că:

$$f\left(\frac{1}{Z}\right) = (-1)^n f(Z).$$

Dezvoltând după formula binomului lui Newton se obţin în dezvoltare termeni de forma Z^p şi Z^{-q} unde

$$0\le p\le m+n.$$

1) Dacă n este par, atunci (1) devine:

$$f\left(\frac{1}{Z}\right) = f(Z).$$

Rezultă că dacă în dezvoltarea lui $f(Z)$ există un termen a_pZ^p atunci există şi termenul a_pZ^{-p}.

În acest caz dezvoltarea lui $f(Z)$ apare ca o sumă de termeni de forma:

$$a_p(Z^p+Z^{-p}) = 2a_p\cos px, \text{ cu } 0\le p\le m+n.$$

2) Dacă n este impar atunci (1) devine:

$$f\left(\frac{1}{Z}\right) = -f(Z).$$

Rezultă în mod analog, că dacă în dezvoltarea lui $f(Z)$ există un termen apZ^p, atunci există şi termenul $-apZ^{-p}$. În acest caz, dezvoltarea lui $f(Z)$ apare ca o sumă de termeni de forma:

$$a_p(Z^p-Z^{-p}) = 2a_pi\sin px.$$

În mod analog se poate găsi o metodă de liniarizare a polinoamelor trigonometrice folosind formula (6).

Exemple:

Să se liniarizeze polinoamele trigonometrice:

a) $Y = \cos x \sin^4 x$.

Se obţine succesiv:

$$Y = \frac{1}{2}\left(Z + \frac{1}{Z}\right)\frac{1}{2^4 i^4}\left(Z - \frac{1}{Z}\right)^4 = \frac{1}{2^5}\left(Z + \frac{1}{Z}\right)\left(Z^4 - 4Z^2 + 6 - \frac{4}{Z^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{Z^4}\right) = \frac{1}{2^5}\left[\left(Z^5 + \frac{1}{Z^5}\right) - 3\left(Z^3 + \frac{1}{Z^3}\right) + 2\left(Z + \frac{1}{Z}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2^4}(\cos 5x - 3\cos 3x + 2\cos x).$$

b) $Z = \cos^2 x \cdot \sin^3 x$.

În mod analog:

$$Z = \frac{1}{2^2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)^2 \frac{1}{2^3 i^3}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)^3 = \frac{1}{2^5 i}\left(e^{2ix} + 2 + e^{-2ix}\right)$$

$$\left(e^{3ix} - 3e^{ix} + 3e^{-ix}\right) = \frac{1}{2^5 i}\left(e^{5ix} - e^{-5ix}\right) - \left(e^{3ix} - e^{-3ix}\right) -$$

$$- 2\left(e^{ix} - e^{-ix}\right) = \frac{1}{2^4}(\sin 5x - \sin 3x - 2\sin x).$$

II. Rezolvarea unor ecuaţii trigonometrice

a) $\sin 3x \sin^3 x + \cos 3x \cdot \cos^3 x = -\frac{1}{8}$

Fie $Z = \cos x + i \sin x$.

Conform formulelor (2) şi (3) avem:

$$\sin x = \frac{Z^2 - 1}{2iZ}, \qquad \cos x = \frac{Z^2 + 1}{2Z}$$

şi

$$\sin 3x = \frac{Z^6 - 1}{2iz^3}, \qquad \cos 3x = \frac{Z^6 + 1}{2Z^3}$$

iar ecuaţia devine:

$$\frac{Z^6 - 1}{2iZ^3}\left(\frac{Z^3 - 1}{2iZ}\right)^3 + \left(\frac{Z^6 + 1}{2Z^3}\right)\left(\frac{Z^2 + 1}{2Z}\right)^3 = \frac{1}{8} \Rightarrow$$

$$(Z^6 - 1)(Z^6 - 3Z^4 + 3Z^2 - 1) + (Z^6 + 1)(Z^6 + 3Z^4 + 3Z^2 + 1) = 2Z^6$$

după efectuarea calculelor se obţine:

$$Z^{12} + 3Z^8 + 3Z^4 + 1 - Z^6 = 0 \Rightarrow (Z^4 + 1)^3 - Z^6 = 0 \Rightarrow$$

$$\left(\frac{Z^4 + 1}{Z^2}\right)^3 = 1 \Rightarrow \left(Z^2 + \frac{1}{Z^2}\right)^3 = 1.$$

Deoarece $Z^2 = \cos 2x + i \sin 2x$ şi $\frac{1}{Z^2} = \cos 2x - i \sin 2x$ obţinem $(2\cos 2x)^3 = \frac{1}{2}$

de unde $\cos 2x = \frac{1}{2}$ şi deci $x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi$ adică obţinem soluţia:

$$x \in \left\{\pm\frac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\right\}.$$

b) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = \cos x + \cos 2x + \cos 3x$

Conform formulelor (2) şi (3), prin înlocuire se obţine:

$$\frac{Z^2 - 1}{2iZ} + \frac{Z^4 - 1}{2iZ^2} + \frac{Z^6 - 1}{2iZ^3} = \frac{Z^2 + 1}{2Z} + \frac{Z^4 + 1}{2Z^2} + \frac{Z^6 + 1}{2Z^3} \Rightarrow$$

$$Z^4 - Z^2 + Z^5 - Z + Z^6 - 1 = iZ^4 + iZ^2 + iZ^5 + iZ + iZ^6 + i \Rightarrow$$

$$Z^6(1 - i) + Z^5(1 - i) + Z^4(1 - i) - (1 - i)Z^2 - (1 - i)Z - (1 - i) = 0.$$

Înmulţind cu $1 + i \neq 0$ obţinem:

$$2(Z^6 + Z^5 + Z^4) - 2i(Z^2 + Z + 1) = 0 \Rightarrow$$

$$2(Z^4 - i)(Z^2 + Z + 1) = 0 \Rightarrow$$

$$Z^2 + Z + 1 = 0 \text{ sau } Z^4 = i$$

Dacă $Z^2 + Z + 1 = 0 \Rightarrow Z = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$, dar ţinând cont că

$$Z = \cos x + i \sin x$$

obţinem:

$$\cos x + i \sin x = \cos\left(\pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right) + i \sin\left(\pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right) \Rightarrow$$

$$x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Dacă $Z^4 = i$, atunci din

$$\cos 4x + i \sin 4x = \cos 0 + i \sin 0$$

obţinem:

$$4x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi;\ x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbf{Z}.$$

În final obţinem:

$$x \in \left\{\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2};\ k \in \mathbf{Z}\right\} \cup \left\{\pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\right\}$$

c) $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x = 1$

Dacă notăm $Z = \cos x + i \sin x$, atunci ecuaţia devine:

$$\left(Z + \frac{1}{Z}\right)^2 + \left(Z^2 + \frac{1}{Z^2}\right)^2 + \left(Z^3 + \frac{1}{Z^3}\right)^2 = 4.$$

Să notăm cu $t = Z + \frac{1}{Z}$ $t^2 - 2 = Z^2 + \frac{1}{Z^2}$ şi atunci:

$$Z^3 + \frac{1}{Z^3} = \left(Z + \frac{1}{Z}\right)^3 - 3\left(Z + \frac{1}{Z}\right) = t^3 - 3t.$$

În acest caz ecuaţia devine:

$$t^2 + (t^2 - 2)^2 + (t^3 - 3t)^2 - 4 = 0 \Rightarrow$$

$$t^2 + t^4 - 4t^2 + 4 + t^6 + 6t^4 + 9t^2 - 4 = 0 \Rightarrow$$

$$t^6 - 5t^4 + 6t^2 = 0 \Leftrightarrow t^2(t^4 - 5t^2 + 4) = 0 \Rightarrow$$

$$t^4 - 5t^2 + 6 = 0 \Rightarrow t^2 = 2 \text{ sau } t^2 = 3 \; t = \pm\sqrt{2} \text{ sau } t = \pm\sqrt{3}$$

$$\cos x = \frac{\pm\sqrt{2}}{2} \text{ sau } \cos x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x = \pm\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \quad x = \pm\frac{5\pi}{4} + 2k\pi$$

$$x = \pm\frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ sau } x = \pm\frac{5\pi}{6} + 2k\pi.$$

În final obţinem:

$$x \in \left\{\frac{\pi}{4}(2k+1), \; k \in \mathbf{Z}\right\} \cup \left\{\frac{\pi}{6}(2k+1), \; k \in \mathbf{Z}\right\}$$

d) $\cos x + \cos 2x - \cos 3x = 1$.

Avem:

$$\frac{Z^2 + 1}{2Z} + \frac{Z^4 + 1}{2Z^2} - \frac{Z^6 + 1}{2Z^3} = 1$$

$$Z^4 + Z^2 + Z^5 + Z - Z^6 - 1 = 2Z^3$$

sau

$$(Z^3 - Z^2 - Z + 1)(Z^3 + 1) = 0$$

de unde:

$$(Z^6 - Z^5 - Z^4 + Z^3) + (Z^3 - Z^2 - Z + 1) = 0$$

$$Z^3 = -1; \cos 3x + \sin 3x = \cos(\pi + 2k\pi) + i \sin(\pi + 2k\pi)$$

$$x = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}$$

sau

$$Z^3 - Z^2 - Z + 1 = 0 \Leftrightarrow Z^2(Z - 1) - (Z - 1) = 0 \Leftrightarrow (Z - 1)^2(Z + 1) = 0$$

de unde:

$$Z^2 = 1 \Rightarrow x = k\pi$$
$$Z = 1 \Rightarrow x = 2k\pi;$$

în final obţinem:

$$x \in \{k\pi, \; k \in \mathbf{Z}\} \cup \left\{\frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}, \; k \in \mathbf{Z}\right\}.$$

III. Ecuaţii algebrice

a) Să se arate că $\cos\frac{\pi}{7}, \cos\frac{3\pi}{7}, \cos\frac{5\pi}{7}$ sunt rădăcinile unei ecuaţii algebrice cu coeficienţi raţionali.

Să calculăm:

$$S_1 = \cos\frac{\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7} + \cos\frac{5\pi}{7}$$

$$S_2 = \cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7} + \cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{5\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7}\cos\frac{5\pi}{7}$$

$$S_3 = \cos\frac{\pi}{7} \cdot \cos\frac{3\pi}{7} \cdot \cos\frac{5\pi}{7}.$$

Notăm $Z = \cos\frac{\pi}{7} + i\sin\frac{\pi}{7}$ şi atunci:

$$Z^7 = \cos\pi + i\sin\pi = -1 \Rightarrow Z^7 + 1 = 0 \Rightarrow$$

$$(Z + 1)(Z^6 - Z^5 + Z^4 - Z^3 + Z^2 - Z + 1) = 0 \Rightarrow$$

$$Z^6 - Z^5 + Z^4 - Z^3 + Z^2 - Z + 1 = 0.$$

Notăm:

$$\omega = Z^6 - Z^5 + Z^4 - Z^3 + Z^2 - Z + 1 = 0.$$

Atunci:

$$S_1 = \frac{Z^2 + 1}{2Z} + \frac{Z^6 + 1}{2Z^3} + \frac{Z^{10} + 1}{2Z^5} = \frac{Z^6 + Z^4 - Z^3 + Z^2 - Z + 1}{2Z^5} = \frac{\omega + Z^5}{2Z^5} = \frac{1}{2}$$

$$S_2 = \left(\frac{Z^2 + 1}{2Z}\right)\left(\frac{Z^6 + 1}{2Z^3}\right) + \left(\frac{Z^6 + 1}{2Z^3}\right)\left(\frac{Z^{10} + 1}{2Z^5}\right) + \left(\frac{Z^{10} + 1}{2Z^5}\right)\left(\frac{Z^2 + 1}{2Z}\right) =$$

$$= \frac{Z^6 - Z^5 + Z^4 - Z^3 + Z^2 + 1}{-2Z} = \frac{\omega + Z}{-2Z} = -\frac{1}{2}$$

$$S_3 = \left(\frac{Z^2 + 1}{2Z}\right)\left(\frac{Z^6 + 1}{2Z^3}\right)\left(\frac{Z^{10} + 1}{2Z^5}\right) = \frac{Z^6 - Z^5 + Z^4 - Z^3 + 2Z^2 - Z + 1}{-8Z^2} =$$

$$= \frac{\omega + Z^2}{-8Z^2} = -\frac{1}{8}.$$

Deci obţinem ecuaţia:

$$Z^3 - \frac{1}{2}Z^2 - \frac{1}{2}Z + \frac{1}{8} = 0$$

care are ca rădăcini valorile date.

b) Să se arate că dacă x, y, z verifică relaţiile:

$$\sin nx + \sin ny + \sin nz = 0$$
$$\cos nx + \cos ny + \cos nz = 0$$

atunci ele verifică şi relaţiile:

$$\sin 2nx + \sin 2nyt + \sin 2nz = 0$$
$$\cos 2nx + \cos 2n + \cos 2nz = 0.$$

Notăm:

$$a = \cos x + i \sin x$$
$$b = \cos y + i \sin y$$
$$c = \cos z + i \sin z$$

şi

$$a^n = \cos nx + i \sin nx$$
$$b^n = \cos ny + i \sin ny$$
$$c^n = \cos nz + i \sin nz.$$

$$a^n + b^n + c^n = (\cos nx + \cos ny + \cos nz) + i(\sin nx + \sin ny + \sin nz) \Rightarrow$$
$$a^n + b^n + c^n = 0 \qquad (1).$$

Dar:

$$a^{2n} + b^{2n} + c^{2n} = (a^n + b^n + c^n)^2 - 2(a^n b^n + a^n c^n + b^n c^n)$$

şi,

$$a^n + b^n + c^n = 0 \Rightarrow \overline{a^n + b^n + c^n} = 0 \Rightarrow$$
$$\frac{1}{a^n} + \frac{1}{b^n} + \frac{1}{c^n} = 0 \qquad (2).$$

Din (1) şi (2):

$$a^{2n} + b^{2n} + c^{2n} = 0;$$

dar:

$$a^{2n} = \cos 2nx + i \sin 2nx$$
$$b^{2n} = \cos 2ny + i \sin 2ny$$
$$c^{2n} = \cos 2nz + i \sin 2nz$$

şi deci:

$$\cos 2nx + \cos 2ny + \cos 2nz = 0$$
$$\sin 2nx + \sin 2ny + \sin 2nz = 0.$$

IV. Demonstrarea unor identităţi trigonometrice

a) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{5}\operatorname{tg}\frac{2\pi}{5} = \sqrt{5}$.

Fie:

$$Z = \cos x + i \sin x \Rightarrow Z^5 = (\cos x + i \sin x)^5 = \cos 5x + i \sin 5x$$

Dezvoltând binomul $(\cos x + i \sin x)^5$, se obţine:

$$\sin 5x = \sin^5 x - 10 \cos^2 x \sin^3 x + 5 \cos^4 x \sin x$$

şi din $\sin x \neq 0 \Rightarrow \sin 5x = \sin^5 x (5 \operatorname{ctg}^4 x - 10 \operatorname{ctg}^2 x + 1)$, se determină numerele din intervalul $(0, \pi)$ astfel încât:

$$\sin 5x = 0;\ \sin x \neq 0,$$

se obţine mulţimea:

$$A = \left\{\frac{\pi}{5}, \frac{2\pi}{5}\right\}.$$

Pentru fiecare dintre numerele reale $\frac{\pi}{5}, \frac{2\pi}{5}$ rezultă că:

$$5 \operatorname{ctg}^4 x - 10 \operatorname{ctg}^2 x + 1 = 0$$

de unde folosind produsul rădăcinilor acestei ecuaţii, avem:

$$\operatorname{ctg}^2\frac{\pi}{5}\operatorname{ctg}^2\frac{2\pi}{5} = \frac{1}{5} \Rightarrow \operatorname{tg}^2\frac{\pi}{5}\operatorname{tg}^2\frac{2\pi}{5} = 5 \Rightarrow \operatorname{tg}^2\frac{\pi}{5}\operatorname{tg}^2\frac{2\pi}{5} = \sqrt{5}$$

deoarece:

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{5} > 0 \text{ şi } \operatorname{tg}\frac{2\pi}{5} > 0.$$

b) Să se arate că dacă $\operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b = \operatorname{tg}^2 c$, avem şi:

$$\frac{\sin^2(a+c)}{\sin^2(b+c)} = \frac{\sin 2a}{\sin 2b}.$$

Notăm: $x = \cos a + i \sin a$

$y = \cos b + i \sin b$

$z = \cos c + i \sin c$

Avem de arătat că dacă:

$$\frac{x^2 - 1}{i(x^2 + 1)} \cdot \frac{y^2 - 1}{i(y^2 + 1)} = \left(\frac{z^2 - 1}{i(z^2 + 1)}\right)^2$$

atunci avem şi:

$$\left(\frac{x^2z^2 - 1}{2ixz}\right)^2\left(\frac{2iyz}{y^2z^2 - 1}\right)^2 = \frac{x^4 - 1}{2ix^2}\,\frac{2iy^2}{y^4 - 1}.$$

Prima relaţie se mai poate scrie:

$$\frac{x^2y^2 - x^2 - y^2 + 1}{x^2y^2 + x^2 + y^2 + 1} = \frac{z^4 - 2z^2 + 1}{z^4 + 2z^2 + 1}.$$

Aplicând proporţii derivate obţinem:

$$\frac{x^2y^2 + 1}{x^2 + y^2} = \frac{z^4 + 1}{2z^2} \qquad (1).$$

Efectuând calculele în relaţia cerută obţinem:

$$(x^4y^4 - 2y^2z^2 + 1)(y^4 - 1) = (y^4z^4 - 2y^2z^2 + 1)(x^4 - 1)$$

Efectuând înmulţirile, reducând termenii asemenea şi simplificând se obţine:

$$2z^2(x^2y^2 + 1) - (x^2 + y^2)(1 + z^4) = 0.$$

$$\frac{x^2 + y^2 + 1}{x^2 + y^2} = \frac{1 + z^4}{2z^2} \text{ adică (1).}$$

c) Să se verifice că:

$$\frac{1}{\cos 6^\circ} + \frac{1}{\sin 24^\circ} + \frac{1}{\sin 48^\circ} = \frac{1}{\sin 12^\circ}.$$

Notăm $Z = \cos 6^\circ + i \sin 6^\circ$, $Z^{15} = \cos 90 + i \sin 90 = i$ avem:

$$\cos 6^\circ = \frac{Z^2+1}{2Z}, \quad \sin 12^\circ = \frac{Z^4-1}{2iZ^3},$$

$$\sin 24^\circ = \frac{Z^8-1}{2iZ^4}, \quad \sin 48^\circ = \frac{Z^6-1}{2iZ^3}.$$

Avem de arătat că:

$$\frac{2Z}{Z^2+1} - \frac{2iZ^2}{Z^4-1} + \frac{2iZ^4}{Z^8-1} + \frac{2iZ^8}{Z^{16}-1} = 0.$$

$$\frac{(Z^{14} - Z^{12} + Z^{10} - Z^8 - Z^4 + Z^2 - 1) - iZ(Z^{12} - Z^{10} + Z^8 - Z^6 + Z^4 - Z^2 + 1)}{Z^{16}-1} \Leftrightarrow$$

$$(Z^{14} - Z^{12} + Z^{10} - Z^8 + Z^6 - Z^4 + Z^2 - 1) - iZ(Z^{12} - Z^{10} + Z^8 - Z^6 + Z^4 - Z^2 + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (Z^{16} - 1) - iZ(Z^{14} + 1) = 0 \Leftrightarrow iZ - 1 - i^2 - iZ = 0 \Leftrightarrow 0 = 0.$$

V. Calcularea unor produse şi sume trigonometrice

Să se calculeze produsul:

$$A = \cos 20 \cos 40 \cos 80.$$

Fie $Z = \cos 20 + i \sin 20$, $Z^9 = -1$ atunci,

$$\cos 20 = \frac{Z^2+1}{2Z}, \quad \cos 40 = \frac{Z^4+1}{2Z^2}, \quad \cos 80 = \frac{Z^8+1}{2Z^4}.$$

$$A = \frac{(Z^2+1)(Z^4+1)(Z^8+1)}{8Z^7} = \frac{1 + Z^2 + Z^4 + Z^6 + Z^8 + Z^{10} + Z^{12} + Z^{14}}{8Z^7} =$$

$$= \frac{Z^{16}-1}{8Z^7(Z^2-1)} = \frac{-Z^7-1}{8(Z^9-Z^7)} = \frac{-Z^7-1}{8(-1-Z^7)} = \frac{1}{8}.$$

b) Să se calculeze produsul:

$$\prod_{k=1}^{n-1} \left(x^2 - 2\cos\frac{2K}{n} + 1\right) \qquad (1).$$

Să aflăm rădăcinile ecuaţiei $X^{2n} - 1 = 0$, unde rădăcinile căutate sunt valorile rădăcinilor complexe de ordinul $2n$ ale unităţii:

$$\varepsilon_0 = 1, \ \varepsilon_1 = \cos\frac{\pi}{n} + i\sin\frac{\pi}{n}, \ \varepsilon_2 = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}, \ldots, \varepsilon_n = -1,$$

$$\varepsilon_{-1} = \overline{\varepsilon}_1 = \cos\frac{\pi}{n} - i\sin\frac{\pi}{n}, \ \varepsilon_{-2} = \overline{\varepsilon}_2 = \cos\frac{2\pi}{n} - i\sin\frac{2\pi}{n}, \ldots$$

Atunci:

$$x^{2n} - 1 = (x^2-1)(x-\varepsilon_1)(x-\varepsilon_{-1})(x-\varepsilon_2)(x-\varepsilon_{-2})\ldots\ldots(x-\varepsilon_{n-1})(x-\varepsilon_{-n-1})$$

Deoarece:

$$(x-\varepsilon_k)(x-\varepsilon_{-k}) = x^2 - 2x\cos\frac{k\pi}{n} + 1,$$

atunci:

$$x^{2n} - 1 = (x^2-1)(x^2 - 2x\cos\frac{\pi}{n} + 1)(x^2 - 2x\cos\frac{2\pi}{n} + 1)\ldots$$

$$\ldots(x^2 - 2x\cos\frac{(n-1)\pi}{n} + 1) = (x^2-1)\prod_{k=1}^{n-1}(x^2 - 2k\cos\frac{k}{n} + 1)$$

de unde rezultă:

$$\prod_{k=1}^{n-1}\left(x^2 - 2x\cos\frac{k}{n} + 1\right) = x^{2n-2} + x^{2n-4} + \ldots + x^2 + 1 \qquad (1).$$

În mod analog se poate descompune binomul $X^{2n} + 1$ în factori reali şi ţinând cont de descompunerea:

$$x^{2n} = \prod_{k=0}^{n-1}\left[x - \left(\cos\frac{(2k+1)\pi}{2n} + i\sin\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)\right] \cdot$$

$$\cdot\left[x - \left(\cos\frac{(2k+1)\pi}{2n} - i\sin\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)\right]$$

se obţin formulele:

$$\prod_{k=0}^{n-1}\left(x^2 - 2x\cos\frac{(2k+1)\pi}{2n} + 1\right) = x^{2n} + 1 \qquad (2)$$

$$x^{2n-1} - 1 = (x-1)\prod_{k=1}^{n}\left(x^2 - 2x\cos\frac{2k\pi}{2n+1} + 1\right) \qquad (3)$$

$$x^{2n-1} + 1 = (x+1)\prod_{k=1}^{n}\left(x^2 + 2x\cos\frac{2k\pi}{2n+1} + 1\right) \qquad (4).$$

c) Să se calculeze produsele:

1) $\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{2n} = \sin\frac{\pi}{2n}\sin\frac{2\pi}{2n}\ldots\sin\frac{(n-1)\pi}{n}.$

Pentru a calcula acest produs, particularizăm în formula (1) pe $x = 1$. Obţinem:

$$\prod_{k=1}^{n-1}\left(4\sin^2\frac{k\pi}{n}\right) = n \text{ sau } 2^{2(n-1)}\left[\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{2n}\right]^2 = n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{2n} = \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}.$$

2) $\prod_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{2n+1} = \sin\frac{\pi}{2n+1}\sin\frac{2\pi}{2n+1}\ldots\sin\frac{n\pi}{2n+1}.$

Facem pe $x = 1$ în formula (2) şi obţinem:

$$\prod_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{2n+1} = \frac{\sqrt{2n+1}}{2^n}.$$

3) $\prod_{k=1}^{n} \sin\frac{(2k-1)\pi}{4n}$

pentru $x = 1$ în formula (2) obținem:

$$\prod_{k=1}^{n} \sin\frac{(2k-1)\pi}{4n} = \frac{\sqrt{2}}{2^n}.$$

d) Să se calculeze sumele:

1) $S_n^1 = \cos\frac{\pi}{n} + \cos\frac{2\pi}{n} + \ldots + \cos\frac{(n-1)\pi}{n}$.

Fie $Z = \cos\frac{\pi}{n} + i\sin\frac{\pi}{n}$, atunci $Z^n = -1$ și $Z \cdot \bar{Z} = 1$

$$S_n^1 = \frac{Z+\bar{Z}}{2} + \frac{Z^2+\bar{Z}^2}{2} + \ldots + \frac{Z^{n-1}+\bar{Z}^{n-1}}{2} = \frac{1}{2}(Z + Z^2 + \ldots + Z^{n-1}) +$$

$$+ \frac{1}{2}(\bar{Z} + \bar{Z}^2 + \ldots + \bar{Z}^{n-1}) = \frac{1}{2}\left(\frac{Z - Z^n}{1-Z} + \frac{\bar{Z} - \bar{Z}^n}{1-\bar{Z}}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{Z+1}{1-Z} + \frac{Z+1}{Z-1}\right) = 0.$$

2) $S_n^2 = \cos\frac{2\pi}{2n+1} + \cos\frac{4\pi}{2n+1} + \ldots + \cos\frac{2n\pi}{2n+1}$.

Notăm cu:

$$Z = \cos\frac{2\pi}{2n+1} + i\sin\frac{2\pi}{2n+1},$$

atunci $Z^{2n+1} = 1$.

Avem:

$$S_n^2 = \frac{Z+\bar{Z}}{2} + \frac{Z^2+\bar{Z}^2}{2} + \ldots + \frac{Z^n+\bar{Z}^n}{2} = \frac{1}{2}(Z + Z^2 + Z^3 + \ldots + Z^n) +$$

$$+ \frac{1}{2}(\bar{Z} + \bar{Z}^2 + \ldots + \bar{Z}^n) = \frac{1}{2}\left(\frac{Z - Z^{n+1}}{1-Z} + \frac{Z^n - 1}{Z^n(Z-1)}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{Z^{n+1} - Z^{2n+1} - Z^n + 1)}{Z^n(1-Z)}\right) = -\frac{1}{2}.$$

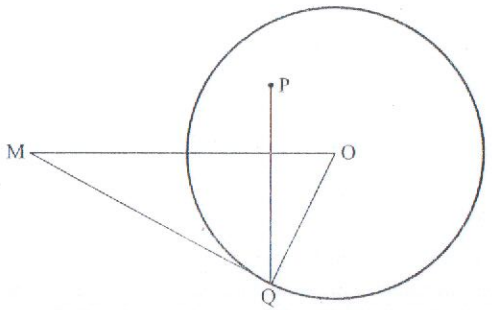
Capitolul XI

PROBLEME PROPUSE LA CONCURSURILE DE MATEMATICĂ

1. Se dă punctul fix P situat în interiorul unui cerc și Q mobil pe acest cerc. Diametrul perpendicularei pe PQ intersectează în punctul M tangenta în Q la cerc. Să se găsească locul geometric descris de punctul M când punctul Q parcurge cercul.

(Concurs Ungaria)

Soluție. Alegem centrul cercului de rază 1 să fie originea. Notăm afixele punctelor O, P și Q cu o, p și respectiv t.



Avem $t\bar{t} = 1$. Fie m afixul lui M. Fie un punct $A(a)$ pe cercul de rază $R = 1$ și cu originea în centrul cercului. Să scriem ecuația tangentei la cerc în punctul A. Fie un punct $Z(z)$ pe tangentă. Din teorema lui Pitagora avem $ZO^2 = ZA^2 + AO^2$, adică:

$$Z \cdot \bar{Z} = (Z - a)(\bar{Z} - \bar{a}) + a\bar{a},$$

de unde obținem că ecuația tangentei este: $a\bar{Z} + \bar{a}Z = 2$.

În cazul nostru ecuația tangentei în Q este $t\bar{Z} + \bar{t}Z = 2$. Din faptul că $MO \perp PQ$ rezultă că:

$$\frac{m - o}{t - a} = ki, \quad k \in \mathbf{R}$$

adică $m = ki(t - a)$. Punând condiția ca punctul M să se găsească pe tangenta în Q, obținem că:

$$ki = \frac{2}{t\bar{a} - a\bar{t}}$$

și de aici că

$$m = \frac{2(t - a)}{t\bar{a} - a\bar{t}}.$$

Observăm că:

$$\bar{m} = -\frac{2(\bar{t} - \bar{a})}{t\bar{a} - a\bar{t}}$$

și apoi că:

$$\bar{a}m + a\bar{m} = \frac{2\bar{a}(t - a) - 2a(\bar{t} - \bar{a})}{t\bar{a} - a\bar{t}} = 2.$$

Deci M descrie dreapta d de ecuație $\bar{a}Z + a\bar{Z} = 2$. Ecuația dreptei PO este $a\bar{Z} - \bar{a}Z = 0$ și rezultă că d descrie o perpendiculară pe dreapta PO. Eliminând între cele două ecuații pe Z obținem:

$$a\bar{a}Z = 1 \text{ de unde } |Z| = \frac{1}{|a|^2} = \frac{1}{PO^2}.$$

Punctul de intersecție se găsește la distanța $\frac{1}{PO^2} > 1$ față de origine. Se observă că punctul P poate fi oriunde în planul cercului de rază R, dar trebuie să fie în acest caz diferit de centrul O al cercului. În acest caz obținem că locul geometric este o dreaptă perpendiculară pe dreapta PO care intersectează dreapta PO într-un punct T la distanța $\frac{R^2}{OP^2}$.

2. Fie un punct M în interiorul triunghiului ABC. Să se arate că centrele de greutate ale triunghiului MAB, MAC, MCB formează un triunghi având aria de nouă ori mai mică decât cea a triunghiului ABC.

Soluție. Fie $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$, $G_1(g_1)$, $G_2(g_2)$, $G_3(g_3)$ unde:

$$g_1 = \frac{1}{3}(m + a + b);\ g_2 = \frac{1}{3}(m + c + a);\ g_3 = \frac{1}{3}(m + c + b).$$

$$\sigma[G_1G_2G_3] = \frac{1}{2}I_m(g_2\bar{g}_1 + g_3\bar{g}_2 + g_1\bar{g}_3) =$$

$$= \frac{1}{18}I_m\Big[(m + c + a)(\bar{m} + \bar{c} + \bar{b}) + (m + c + b)(\bar{m} + \bar{c} + \bar{a}) + (m + a + b) \cdot$$

$$\cdot(\bar{m} + \bar{c} + \bar{b})\Big] = \frac{1}{9}\Big[\frac{1}{2}I_m(a\bar{b} + b\bar{c} + c\bar{a}) + \frac{1}{2}I_m\sum(|a|^2 + |m|^2) + a\bar{b} + \bar{a}b +$$

$$+ 2(m\bar{a} + \bar{m}a)\Big] = \frac{1}{9}\sigma[ABC],$$

deoarece $\frac{1}{2}\mathrm{Im}(|a|^2 + |m|^2) + a\bar{b} + \bar{a}b + 2(m\bar{a} + \bar{m}a)$ este real.

3. În triunghiul ABC mediana $[AM]$ $(M \in (BC))$ are mijlocul D, iar perpendiculara pe mijlocul segmentului $[DM]$ trece prin ortocentrul H. Să se arate că $AM = BC$.

(*C.T. Nedelcu.* G.M. nr. 11-12 din 1986)

Soluție. Alegem sistemul de coordonate în centrul cercului circumscris triunghiului ABC și fie a, b, c afixele punctelor A, B, C și avem $a\bar{a} = b\bar{b} = c\bar{c} = 1$.

Fie N mijlocul lui $[DM]$ și să notăm cu d, m, n afixele punctelor D, M, N. Atunci:

$$d = \frac{m + 1}{2},\quad n = \frac{3m + 1}{4} \text{ și } h = a + b + 1 = 2m + 1.$$

Condiția ca $HN \perp AM$ se scrie astfel:

$$\frac{n - h}{m - 1} = ki,\quad k \in \boldsymbol{R}$$

de unde:

$$n = h + ki(m - 1) \text{ sau } n = 2m + 1 + ki(m - 1) \qquad (1).$$

Să scriem că punctele A, N și M sunt coliniare. Ecuația dreptei AM este:

$$Z(\bar{m} - 1) - \bar{Z}(m - 1) + m - \bar{m} = 0.$$

Punând condiția ca $N \in AM$ obținem:

$$(\bar{m} - 1)\big[2m + 1 + ki(m - 1)\big] - (m - 1)\big[2\bar{m} + 1 - ki(\bar{m} - 1)\big] + m - \bar{m} = 0$$

de unde găsim:

$$ki = \frac{m - \bar{m}}{(m - 1)(\bar{m} - 1)}.$$

Înlocuind în (1) obținem că:

$$n - h = \frac{m - \bar{m}}{\bar{m} - 1} \text{ sau } \frac{3m + 1}{4} - 2m - 1 = \frac{m - \bar{m}}{\bar{m} - 1} \text{ sau } m + \bar{m} + 3 = 5m\bar{m}.$$

Ținând cont că $m = \frac{a + b}{2}$ obținem condiția:

$$2(b + c + \bar{b} + \bar{c} + 1) = 5(b\bar{c} + \bar{b}c) \qquad (2).$$

Dar condiția ca $AM = BC$ este echivalentă cu:

$$\left|\frac{b + c}{2} - 1\right| = |b - c| \text{ sau } \left(\frac{b + c}{2} - 1\right)\left(\frac{\bar{b} - \bar{c}}{2} - 1\right) = (b - c)(\bar{b} - \bar{c})$$

sau

$$2(b + c + \bar{b} + \bar{c} + 1) = 5(b\bar{c} + \bar{b}c)$$

adică (2). Deci rezultă $AM = BC$.

4. Aria patrulaterului convex $ABCD$ este S. Pe laturile (AB), (BC), (CD) și (DA) se iau corespunzător punctele M, N, P, Q, astfel încât:

$$\frac{AM}{MB} = \frac{BN}{NC} = \frac{CP}{PD} = \frac{DQ}{QA} = k.$$

Să se determine suma T a ariilor triunghiurilor APB, BQC, CMD și DNA.

(*Concurs U.R.S.S.* – 1979)

Soluție. Avem:

$$m = \frac{a+kb}{1+k},\ n = \frac{b+kc}{1+k},\ p = \frac{c+kd}{1+k},\ q = \frac{d+ka}{1+k}.$$

$$T = \frac{1}{2}\sum \operatorname{Im}(p\bar{a} + b\bar{p} + a\bar{b}) = \frac{1}{2}\sum I_m\left(\frac{c+kd}{1+k}\bar{a} + b\frac{\bar{c}+k\bar{d}}{1+k} + a\bar{b}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\sum\left(\frac{k}{k+1}d\bar{a} + \bar{a}b + \frac{1}{k+1}b\bar{c} + \frac{1}{k+1}c\bar{a} + \frac{k}{k+1}b\bar{d}\right) =$$

$$= \frac{k}{k+1}S + S + \frac{1}{1+k}S = 2S$$

deoarece numărul $c\bar{a} + d\bar{b} + \overline{ac} + b\bar{d}$ este real.

5. Se consideră în planul complex triunghiurile echilaterale OAB și OAC având latura comună $[OA]$. Știind că punctul O are afixul O și că A are afixul $\cos t + i \sin t$, $t \in [0, 2\pi]$ să se determine afixele punctelor B și C precum și afixul mijlocului segmentului $[BC]$.

Soluție. Punctele B și C se obțin prin rotația punctului A în jurul punctului A cu unghiurile $\frac{\pi}{3}$ și respectiv $-\frac{\pi}{3}$ sau invers. Deci, unul din puncte va avea afixul:

$$Z_1 = \left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)(\cos t + i\sin t) = \cos\left(\frac{\pi}{3} + t\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3} + t\right)$$

și respectiv:

$$Z_2 = \left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right](\cos t + i\sin t) = \cos\left(t - \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right).$$

Rezultă imediat că afixul mijocului $[BC]$ va fi:

$$\frac{Z_1 + Z_2}{2} = \frac{1}{2}(\cos t + i\sin t).$$

6. În planul unui triunghi oarecare ABC, în exteriorul acesteia, se construiesc triunghiurile ABR, BCP, CAQ astfel ca:

$\sphericalangle PBC = \sphericalangle CAQ = 45°$; $\sphericalangle BCP = \sphericalangle QCA = 30°$; $\sphericalangle ABR = \sphericalangle BAR = 15°$.

Să se arate că: $QR \perp RP$.

(O.I.M – 1975)

Soluție. Notăm afixele punctelor cu laturile mici corespunzătoare. Fie: $\omega = \cos 15 + i \sin 15$ și atunci avem relațiile $\omega^6 = i$, $\omega^{12} = -1$, etc. Atunci avem:

$$a - r = (b - r)\omega^{10},\ \sqrt{2}(b - p) = (c - p)\omega^7 \text{ și } c - q = \sqrt{2}(a - q)\omega^7$$

de unde obținem că:

$$r = \frac{a - b\omega^{10}}{1 - \omega^{10}} = \frac{a\omega^2 - b\omega^{12}}{\omega^2 - \omega^{12}} = \frac{a\omega^2 + b}{\omega^2 + 1},$$

$$p = \frac{b\sqrt{2} - \omega^7}{\sqrt{2} - \omega^7},\ q = \frac{c - a\omega^7\sqrt{2}}{1 - \omega^7\sqrt{2}}.$$

Calculând raportul:

$$\frac{q - r}{p - r} = \frac{1 + \omega^5\sqrt{2}}{1 - i\omega\sqrt{2}} - \frac{\omega^3 + \omega^8\sqrt{2}}{\omega^3 - i\omega^4\sqrt{2}} = i$$

după înlocuirea lui ω, deci $QR \perp RP$.

7. Pe laturile unui patrulater convex $ABCD$ se construiesc în afara acestuia triunghiuri dreptunghice isoscele AMB, BNC, CPD, DQA. Să se arate că:

a) Dreptele MP și NQ sunt perpendiculare și $MP = NQ$

b) Mijloacele segmentelor $|MP|$, $|NQ|$, $|AC|$ și $|BD|$ sunt vârfurile unui pătrat.

Soluție. Notăm afixele punctelor cu litere mici corespunzătoare. Rezultă că:

$b - m = (a - m)i$, $c - n = (b - n)i$, $d - p = (c - p)i$ și $a - q = (d - q)i$

de unde:

$$m(1 - c) = b - ai,\ n(1 - c) = -bi,\ p(1 - c) = d - ci.$$

și

$$q(1 - c) = a - di.$$

Obținem că:

$(p - m)(1 - c) = (d - b) + (a - c)i$ și $(q - n)(1 - i) = (a - c) + (b - d)i$.

Obținem că $(p - m) = (q - n)i$ ceea ce înseamnă că $MP \perp NQ$ și $MP = NQ$.

b) Fie $U(u)$, $V(v)$, $X(x)$ și $Y(y)$ mijloacele segmentelor $|MP|$, $|NQ|$, $|AC|$ și $|BD|$. Obținem că:

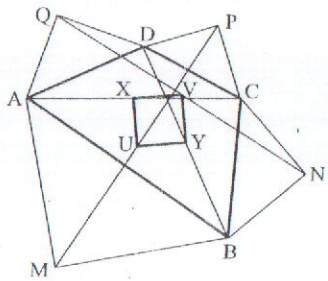
$$u - x = y - v = \frac{1}{4}(1 + i)[(b + d) - (a + c)]$$

adică $UX = VY$ și $UX \parallel VY$ și:

$$v - x = y - u = \frac{1}{4}(i - 1)[(a + c) - (b + d)],$$

adică $XY = UY$ și $YX \parallel UY$.

Se observă că $u - x = (v - x)i$, ceea ce înseamnă că $\sphericalangle YXU = 90°$. Deci $UVXY$ este un pătrat.



8. Pe laturile triunghiului ABC se construiesc triunghiurile echilaterale BCA_1, ACB_1, BAC_1 astfel încât BCA_1 să fie de aceeași parte de drepta BC cu

triunghiul ABC, iar celelalte două triunghiuri echilaterale ACB_1 și BAC_1 să fie de o parte și de alta, față de dreapta comună cu triunghiul ABC. Notând cu M centrul de greutate al triunghiului echilateral BCA_1, să se arate că triunghiul C_1MB_1 este isoscel și $\sphericalangle B_1MC_1 = 120^\circ$.

Soluție. Notăm afixele punctelor cu litere mici corespunzătoare. Fie:

$$\omega = \cos 60 + i \sin 60$$

și avem $\omega^3 = -1$ și $\omega^3 = \omega - 1$. Obținem că

$$a_1 = c\omega - b\omega^2,\ b_1 = \omega - a\omega^2,\ c_1 = a\omega - b\omega^2 \text{ și } m = \frac{i+\omega}{2}(c - b\omega^2).$$

Atunci:

$$c_1 - m = \frac{1}{3}\left[3a\omega - b(\omega + \omega^2) + c(1+\omega)\right]$$

și

$$b_1 - \omega = \frac{1}{3}\left[-3a\omega^2 - b(1-\omega^2) + c(\omega + \omega^2)\right].$$

Se observă că $c_1 - m = \omega^2(b_1 - m)$, ceea ce înseamnă că:

$$MC_1 = MB_1 \text{ și } \sphericalangle B_1MC_1 = 120^\circ.$$

9. În interiorul unui pătrat $ABCD$ se construiesc triunghiurile echilaterale ABK, BCL, CDM, DAN. Să se demonstreze că mijloacele celor patru segmente KL, LM, MN, NK și mijloacele celor opt segmente AK, BK, BL, CL, CM, DM, DN, AN sunt vârfurile uni dodecagon regulat.

(*O.I.M.* – 1977)

Soluție. Alegem originea O, centrul cercului și ca axe diagonalele pătratului. Dacă notăm cu $\omega = \cos 30 + i \sin 30$, avem $\omega^3 = i$ și analoagele. Atunci notăm cu $A(1)$, $B(\omega^3)$, $C(\omega^6)$, $D(\omega^9)$ și obținem că

$$k = \omega^5 - \omega^2 + 1,\ l = -\omega^2 + \omega,\ m = -\omega^5 + \omega^2 - 1 \text{ și } n = \omega^2 - \omega.$$

Obținem deci că $m = -k$ și $n = -l$. Dar efectuând calculele obținem că: $n = mi = -l = -ki$, adică $MNKL$ este pătrat de centru O ceea ce înseamnă că și mijloacele R, S, T, P ale celor patru segmente KL, LM, MN, NK sunt vârfurile unui pătrat cu centrul în O.

Fie $U(u)$, $V(v)$ mijloacele segmentelor AN și AK. Avem atunci:

$$s = \frac{1}{2}(m+1) = \frac{1}{2}(\sqrt{3} - 1),\ u = \frac{1}{2}(1+n) = \frac{\sqrt{3}-1}{2}\omega,$$

$$v = \frac{1}{2}(1+k) = \frac{1}{3}\left[1 + (\omega - 1)^2(\omega + 1)\right].$$

Calculând obținem că $s\omega = u$ și $v\omega = s$, ceea ce ne arată că U și V aparțin cercului circumscris pătratului $RSTP$ și sunt de o parte și de alta a acestuia pe un arc privit din centrul O sub același unghi de 30°.

10. Să se demonstreze că dacă $ABCD$ este inscriptibil, atunci centrele de greutate ale triunghiurilor ABC, BCD, CDA, ADB aparțin unui cerc.

Soluție. Deoarece $ABCD$ este inscriptibil atunci:

$$\frac{c-a}{c-b} : \frac{d-a}{d-b} \in \boldsymbol{R} \qquad (1).$$

Afixele centrelor de greutate a triunghiului ABC, BCD, CDA, și ADB sunt:

$$g_1 = \frac{a+b+c}{3},\ g_2 = \frac{b+c+d}{3},\ g_3 = \frac{c+d+a}{3} \text{ și } g_4 = \frac{a+d+b}{3}$$

și cum:

$$\frac{g_4 - g_2}{g_4 - g_3} : \frac{g_1 - g_2}{g_1 - g_3} = \frac{a-c}{b-c} : \frac{a-d}{b-d} \in \boldsymbol{R}$$

ținând cont de (1) rezultă că centrele de greutate ale triunghiurilor date sunt pe cerc.

Se verifică ușor că nu pot fi coliniare.

11. Laturile neparalele (AD) și (BC) ale patrulaterului $ABCD$ se intersectează în punctul O. Punctele P și S sunt mijloacele diagonalelor (BD) și (AC). Să se demonstreze că aria patrulaterului $ABCD$ este de patru ori mai mare decât aria triunghiului OSP.

Soluție. Se alege punctul O ca originea sistemului de coordonate. Deoarece, pe de-o parte, punctele O, D, A, iar pe de altă parte, punctele O, C, B sunt coliniare, există numerele reale, nenule λ și μ astfel încât $d = \lambda a$ și $c = \mu b$.

În consecință $\bar{c}b$, $b\bar{c}$, $\bar{a}d$ și $d\bar{a}$ sunt numere reale.

Deci:

$$\sigma[ABCD] = \frac{1}{2} I_m(b\bar{a} + \bar{c}b + \bar{d}c + \bar{a}d) = \frac{1}{2} I_m(b\bar{a} + d\bar{c})$$

$$\sigma[OSP] = \frac{1}{2} I_m\left(\frac{b+d}{2} \cdot \frac{\bar{a}+\bar{c}}{2}\right) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} I_m(b\bar{a} + d\bar{c}) = \frac{1}{4}\sigma[ABC].$$

12. Fie Z_1, Z_2, Z_3 numere complexe distincte privind același modul r. Arătați că:

$$\frac{1}{|Z_1 - Z_2|\,|Z_1 - Z_3|} + \frac{1}{|Z_2 - Z_1|\,|Z_2 - Z_3|} + \frac{1}{|Z_3 - Z_1|\,|Z_3 - Z_2|} \geq \frac{1}{r^2}.$$

(*Dorin Andrica*)

Soluție: Din ipoteză rezultă că imaginile geometrice A_1, A_2, A_3 ale numerelor complexe Z_1, Z_2, Z_3 aparțin unui cerc de rază r și avem:

$|Z_1 - Z_2| = A_1A_2 = a_3$, $|Z_2 - Z_3| = A_2A_3 = a_1$, $|Z_1 - Z_3| = A_1A_3 = a_2$.

Problema se reduce la a demonstra că într-un triunghi de laturi a_1, a_2, a_3 înscris într-un cerc de raze R (R este egal cu modulul r al numerelor complexe Z_1, Z_2, Z_3), avem:

$$\frac{1}{a_1a_2} + \frac{1}{a_2a_3} + \frac{1}{a_3a_1} \geq \frac{1}{R^2} \Leftrightarrow \frac{a_1+a_2+a_3}{a_1a_2a_3} \geq \frac{1}{R^2}.$$

Dar:

$$R = \frac{a_1a_2a_3}{4S} \Rightarrow \frac{a_1+a_2+a_3}{4SR} \geq \frac{1}{R^2} \Leftrightarrow \frac{a_1+a_2+a_3}{4S} \geq \frac{1}{R}.$$

Ținând cont că $\frac{a_1+a_2+a_3}{2S} = \frac{1}{r_0}$ unde r_0 este raza cercului înscris în $A_1A_2A_3$, inegalitatea revine la $\frac{1}{2r_0} \geq \frac{1}{R}$ sau $R \geq 2r_0$ care este cunoscută ca fiind inegalitatea lui Euler.

13. Fie $n \geq 3$ un număr natural fixat şi:

$$\omega = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}.$$

Să se arate că, pentru care $a \in \mathbf{C}$ şi $r > 0$, numărul:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{|a - r\omega^k|}{|a|^2 + r^2}$$

este întreg.

(O. Stănăşilă - baraj 1981)

Soluţie. Avem:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{|a - r\omega^k|^2}{|a|^2 + r^2} = \frac{1}{|a|^2 + r^2}\sum_{k=1}^{n}(a - r\omega^k)\overline{(a - r\omega^k)} = \frac{1}{|a|^2 + r^2}\cdot$$

$$\cdot \sum_{k=1}^{n}(a - r\omega^2)(\bar{a} - r\bar{\omega}^2 = \frac{1}{|a|^2 + r^2}\sum_{k=1}^{n}(a\bar{a} + r^2 - ar\bar{\omega}^k - \bar{a}r\omega^k) =$$

$$= n - \frac{1}{|a|^2 + r^2}\left(\sum_{k=1}^{n} ar\bar{\omega}^k + \sum_{k=1}^{n}\bar{a}r\omega^k\right) = n - \frac{ar}{|a|^2 + r^2}\sum_{k=1}^{n}\bar{\omega}^2 -$$

$$- \frac{\bar{a}r}{|a|^2 + r^2}\sum_{k=1}^{n} = n - \frac{qr}{|a|^2 + r^2}\cdot\frac{\bar{\omega}(\bar{\omega}^n - 1)}{\bar{\omega} - 1} - \frac{\bar{a}r}{|a|^2 + r^2}\cdot\frac{a(\omega^n - 1)}{\omega - 1} = n.$$

Interpretarea geometrică. Fie $M_1 M_2 \ldots M_n$ un poligon regulat cu n laturi, înscris în cercul de rază r şi de centru O şi A un punct din planul său. Rezultatul problemei arată că:

$$AM_1^2 + AM_2^2 + \ldots + AM_n^2 = n(OA^2 + r^2)$$

deci că suma pătratelor distanţelor de la un punct la vârfurile unui poligon cu n laturi este n ori suma dintre pătratul distanţei de la A la centrul poligonului şi raza poligonului la pătrat.

14. Pentru un punct M din planul triunghiului ascuţitunghic neechilateral ABC, notăm cu $S(M) = AC' + BA' + CB'$ unde A', B' şi C' sunt proiecţiile lui M pe BC, AC şi respectiv AB. Să se determine că pentru orice două puncte M şi $N \in \text{Int}[ABC] \setminus IO$ avem $S(M) = S(N)$ dacă şi numai dacă $MN \parallel IO$. (notaţiile sunt cele consacrate).

(M. Andronache)

Soluţie. Fie $M \in \text{Int}[ABC]$ şi $\alpha = m(\sphericalangle MBC)$.

$$\overline{BM}\cdot\overline{BC} = BM\cdot BC\cdot\cos\alpha = BC\cdot BA', \quad (\alpha < 90^\circ)$$

deci:

$$BA' = \frac{\overline{BM}\cdot\overline{BC}}{BC}.$$

Analog:

$$AC' = \frac{\overline{AM}\cdot\overline{AB}}{AB} \text{ şi } CB' = \frac{\overline{CM}\cdot\overline{BC}}{AC}.$$

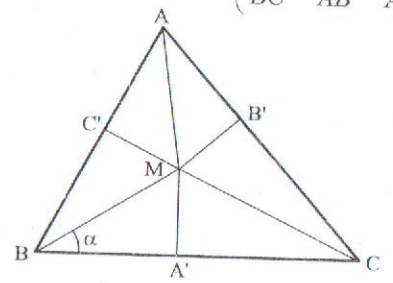
Obţinem:

$$S(M) = \frac{\overline{BM}\cdot\overline{BC}}{BC} + \frac{\overline{AM}\cdot\overline{AB}}{AB} + \frac{\overline{CM}\cdot\overline{CA}}{AC} =$$

$$= \frac{(\overline{BA} + \overline{AM})\overline{BC}}{BC} + \frac{\overline{AM}\cdot\overline{AB}}{AB} + \frac{(\overline{CA}\cdot\overline{AM})\overline{CA}}{AC} =$$

$$= \frac{\overline{BA}\cdot\overline{BC}}{BC} + \frac{\overline{CA}\cdot\overline{CB}}{AC} + \overline{AM}\left(\frac{\overline{BC}}{BC} + \frac{\overline{AB}}{AB} + \frac{\overline{CA}}{AC}\right) =$$

$$= AB\cos B + AC + \overline{AM}\cdot\left(\frac{\overline{BC}}{BC} + \frac{\overline{AB}}{AB} + \frac{\overline{CA}}{AC}\right).$$



Fie: $\bar{u}_1 = \frac{\overline{BC}}{BC}$, $\bar{u}_2 = \frac{\overline{AB}}{AB}$; $\bar{u}_3 = \frac{\overline{CA}}{AC}$ şi $\bar{u} = \bar{u}_1 + \bar{u}_2 + \bar{u}_3$. Dacă $\bar{u} = \bar{o}$, cum $|\bar{u}_1| = |\bar{u}_2| = |\bar{u}_3| = 1$ atunci:

$$m(\sphericalangle\bar{u}_1, \bar{u}_2) = m(\sphericalangle\bar{u}_2, \bar{u}_3) = m(\sphericalangle\bar{u}_1, \bar{u}_3) = 60^\circ,$$

deci ΔABC este echilateral, fals. Deci $\bar{u} \neq \bar{o}$.

Fie $M, N \in \text{Int}([ABC)]$. Atunci:

$$S(M) = S(N) \Leftrightarrow AB\cos B + AC + \overline{AM}\cdot\bar{u} = AB\cos B + AC + \overline{AN}\cdot\bar{u}$$

$$\Leftrightarrow (\overline{AM} - \overline{AN})\cdot\bar{u} = \bar{o} \Leftrightarrow \overline{NM}\cdot\bar{u} = 0.$$

Cum $N \neq M$ şi $\bar{u} \neq \bar{o} \Rightarrow S(M) = S(N) \Leftrightarrow MN \perp$ (direcţia $\bar{u}$). Cum $S(I) = S(O) = p \Rightarrow IO \perp$ (direcţia $\bar{u}$).

Deci $S(M) = S(N) \Leftrightarrow MN \parallel IO$.

15. Fie $f = Z^n + a_{n-1}Z^{n-1} + \ldots + a_1 Z + a_0$, un polinom cu coeficienţi complecşi. Să se demonstreze că există $Z \in \mathbf{C}$ astfel încât $|Z| = 1$ şi $|f(Z)| \geq 1$.

(Olimpiadă – România)

Soluţie. Fie $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ rădăcinile de ordinul $n + 1$ ale unităţii:

$$\varepsilon_k^{n-1} = 1, \; k = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Atunci:

$$\sum_{i=0}^{n}\varepsilon_i^{\,k} = 0 \text{ pentru } k \in \{1, 2.., n\} \text{ şi } \sum_{i=0}^{n}\varepsilon_i^{\,n+1} = n + 1.$$

Atunci:

$$\left|\sum_{i=0}^{n}\varepsilon_i f(\varepsilon_i)\right| = \left|\sum_{i=0}^{n}\varepsilon_i\left(\varepsilon_i^n + a_{n-1}\varepsilon_i^{n-1} + \ldots + a_1\varepsilon_i + a_0\right)\right| =$$

$$= \left| \sum_{i=0}^{n} \varepsilon_i^{n-1} + a_{n-1} \sum_{i=0}^{n} \varepsilon_i^{n} + \ldots + a_1 \sum_{i=0}^{n} \varepsilon_i^{2} + a_0 \sum_{i=0}^{n} \right| - n + 1$$

de unde deducem că:

$$n + 1 = \left| \sum_{i=0}^{n} \varepsilon_i f(\varepsilon_i) \right| \leq \sum_{i=0}^{n} |f(\varepsilon_i)|.$$

Din $\sum_{i=0}^{n} |f(\varepsilon_i)| \geq n + 1$ rezultă că există $k \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$ astfel încât $|f(\varepsilon_k)| \geq 1$, deci $Z = \varepsilon_k$, $|Z| = 1$ şi $|f(Z)| \geq 1$.

16. Fie (A_kB_k), $k = 1, 2, 3$, bisectoarele interioare ale triunghiului $A_1A_2A_3$. Să se găsească raportul dintre aria triunghiului $B_1B_2B_3$ şi cea a triunghiului dat în funcţie de lungimile laturilor triunghiului iniţial.

Soluţie. Fie $A_k(a_k)$, $k = 1, 2, 3$, $l_1 = A_2A_3$, $l_2 = A_1A_3$, $l_3 = A_1A_2$.

Avem:

$$B_1\left(\frac{l_2a_2 + l_3a_3}{l_2 + l_3}\right),\ B_2\left(\frac{l_1a_1 + l_2a_3}{l_1 + l_2}\right),\ B_3\left(\frac{l_1a_1 + l_2a_2}{l_1 + l_2}\right).$$

$$\sigma[B_1B_2B_3] = \frac{1}{2} I_m \sum \frac{(l_1a_1 + l_3a_3)(l_2\bar{a}_2 + l_3\bar{a}_3)}{(l_1 + l + 3)(l_2 + l_3)} =$$

$$= \frac{1}{2(l_1 + l_3)(l_2 + l_3)(l_1 + l_2)} \cdot I_m \sum (l_1 + l_2)(l_1a_1 + l_3a_3)(l_2\bar{a}_2 + l_3\bar{a}_3) =$$

$$= \frac{2l_1l_2l_3\,\sigma[A_1A_2A_3]}{(l_1 + l_3)(l_2 + l_3)(l_1 + l_2)}.$$

Deci:

$$\frac{\sigma[B_1B_2B_3]}{\sigma[A_1A_2A_3]} = 2\,\frac{l_1l_2l_3}{(l_1 + l_3)(l_2 + l_3)(l_1 + l_2)}.$$

17. Aria triunghiului ABC este S. Punctele M şi N sunt mijloacele laturilor (AC) respectiv (AB), iar punctele P şi Q împart latura (BC) în trei segmente concurente. Să se determine aria patrulaterului $QPLK$ unde K şi L sunt punctele de intersecţie cu MB ale lui AQ, respectiv MP.

(Olimpiada URSS - 1979)

Soluţie. Alegem punctul B ca origine a sistemului de coordonate. Atunci:

$$l = \frac{1}{5}a + \frac{1}{5}c,\ n = \frac{1}{2}a,\ m = \frac{a + c}{2},\ p = \frac{c}{3}.$$

Notând cu $S' = \sigma[QPLK]$, avem:

$$S' = \frac{1}{2} I_m(q\bar{p} + k\bar{q} + l\bar{k} + \bar{p}l) = \frac{1}{2} I_m\left[\frac{1}{2}(a + c)\frac{2}{3}\bar{c} + \left(\frac{\bar{a}}{5} + \frac{\bar{c}}{5}\right)\frac{c}{3}\right] =$$

$$\frac{4}{15}S - \frac{1}{15}S = \frac{1}{5}S.$$

18. Fie patrulaterul plan $ABCD$. Punctul A_1 este simetricul punctului A faţă de B, punctul B_1 este simetricul punctului B faţă de C, punctul C_1 este simetricul punctului C faţă de D, iar punctul D_1 este simetricul punctului D faţă de A.

Să se construiască patrulaterul $ABCD$ dacă se cunosc punctele A_1, B_1, C_1, D_1.

(Concurs Ungaria)

Soluţie. Fie O arbitrar centrul sistemului de coordonate. Notăm afixele punctelor cu litere mici. Avem:

$$a + a_1 = 2b,\ (1);\ b + b_1 = 2c,\ (2);\ c + c_1 = 2d,\ (3);\ d + d_1 = 2a \qquad (4).$$

Din (1) avem $a = 2b - a_1$ (5) şi din (2) avem $b = 2c - b_1$ care înlocuită în (5) ne dă:

$$a = 4c - 2b_1 - a_1 \qquad (6).$$

Din relaţia (3) se găseşte $c = 2d - c_1$ şi se înlocuieşte în relaţia (6) de unde obţinem:

$$a = 8d - 4c_1 - 2b_1 - a_1 \qquad (7).$$

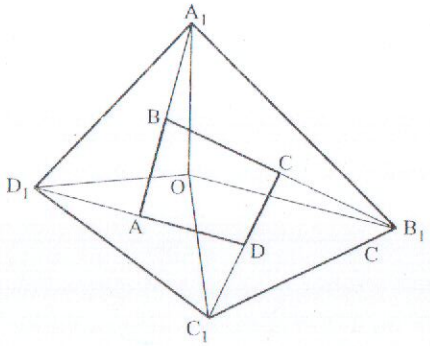
Din relaţia (4) rezultă că $d = 2a - d_1$, care înlocuită în (7) ne dă:

$$a = 16a - 8d_1 - 4c_1 - 2b_1 - a_1.$$

Rezultă astfel că:

$$a = \frac{1}{15}(8d_1 + 4c_1 + 2b_1 + a_1).$$

Numerele a_1, b_1, c_1, d_1 sunt cunoscute. Se poate deci construi afixul A al numărului complex a, ceea ce înseamnă că se găseşte astfel punctul A, iar B este mijlocul lui AA_1, C al lui BB_1 şi D este mijlocul lui CC_1.



19. Hexagonul convex $A_1A_2 \ldots A_6$ are aria S iar punctele P_1, P_2, P_3 sunt mijloacele laturilor (A_1A_2), (A_2A_5) respectiv (A_3A_6). Dacă S_1 este aria triunghiului $P_1P_2P_3$ iar S_2 este aria hexagonului cu vârfurile în mijloacele triunghiului dat, să se arate că:

$$S_1 + S_2 = \frac{3}{4}S.$$

Soluţie: Fie $A_k(a_k)$, $k = 1, 2, 3$; mijloacele segmentelor (A_k, A_{k+1}) sunt:

$$B_k\left(\frac{a_k + a_{k-1}}{2}\right) \quad (A_7 = A_1).$$

Avem şi:

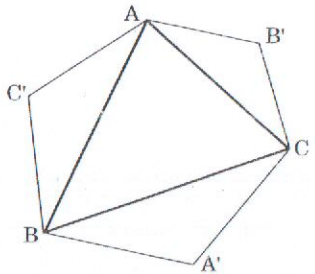
$$P_1\left(\frac{a_1 + a_4}{2}\right), \quad P_2\left(\frac{a_2 + a_5}{2}\right), \quad P_3\left(\frac{a_3 + a_6}{2}\right)$$

de unde:

$$S_1 + S_2 = \frac{1}{2} I_m\left(\frac{a_2 + a_5}{2} \cdot \frac{\bar{a}_1 + \bar{a}_6}{2} + \frac{a_3 + a_6}{2} \cdot \frac{\bar{a}_2 + \bar{a}_5}{2} + \right.$$
$$+ \frac{a_1 + a_4}{2} \cdot \frac{\bar{a}_3 + \bar{a}_6}{2} + \frac{a_2 + a_5}{2} \cdot \frac{\bar{a}_1 + \bar{a}_2}{2} + \frac{a_3 + a_4}{2} \cdot \frac{\bar{a}_2 + \bar{a}_3}{2} +$$
$$+ \frac{a_4 + a_5}{2} \cdot \frac{\bar{a}_3 + \bar{a}_5}{2} + \frac{a_5 + a_6}{2} \cdot \frac{\bar{a}_4 + \bar{a}_5}{2} + \frac{a_6 + a_1}{2} \cdot \frac{\bar{a}_5 + \bar{a}_6}{2} +$$
$$\left. + \frac{a_1 + a_2}{2} \cdot \frac{\bar{a}_6 + \bar{a}_1}{2}\right) = \frac{3}{4} S.$$

20. Pe laturile unui triunghi ABC, în afara acestuia, se construiesc triunghiurile isoscele $(BA'C)$, $(CB'A)$, $(AC'B)$ astfel încât $m(\hat{A}') + m(\hat{B}') + m(\hat{C}') = 2\pi$. Să se arate că unghiurile triunghiului $(A'B'C')$ au măsura independentă de forma triunghiului (ABC).

Soluţie. Fie $A(a)$, $B(b)$, $C(O)$, $A'(a')$, $B'(b')$, $C(c')$.



Atunci:

$$(b - a') = (c - a')\alpha; \; (c - b') - (a - b')\beta; \; (a - c') = (b - c)\gamma$$

unde $\alpha\beta\gamma = 1$, $|\alpha| = |\beta| = |\gamma| = 1$. Rezultă că

$$a'(1 - \alpha) = b - c\alpha; \; b'(1 - \beta) = c - a\beta; \; c'(1 - \gamma) = a - b\gamma$$
$$(b' - c')(1 - \beta)(1 - \gamma) = (c - a\beta)(1 - \gamma) - (a - b\gamma)(1 - \beta)$$
$$(a' - c')(1 - \alpha)(1 - \gamma) = (b - c\alpha)(1 - \gamma) - (a - b\gamma)(1 - \alpha).$$

Deci

$$\frac{b' - c'}{a' - c'} = \frac{1 - \alpha}{1 - \beta} \frac{(c - a) + (b - c)\gamma + (a - b)\beta\gamma}{(a - c)\alpha + (c - b)\alpha\gamma + (b - a)} = -\frac{1 - \alpha}{\alpha(1 - \beta)} = \frac{\alpha - 1}{\alpha(1 - \beta)}$$

deoarece $\alpha\beta\gamma = 1$, ceea ce înseamnă că măsurile unghiurilor triunghiului $(A'B'C')$ nu depind de forma triunghiului (ABC). Mai exact, se observă că:

$$\operatorname{Arg}\frac{\alpha - 1}{\alpha(1 - \beta)} = \operatorname{Arg}(\alpha - 1) - \operatorname{Arg}\alpha - \operatorname{Arg}(1 - \beta) = \frac{1}{2}(\operatorname{Arg}\alpha + \pi) - \operatorname{Arg}\alpha -$$

$$- (\pi + \operatorname{Arg}(\beta - 1)) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\operatorname{Arg}\alpha - \pi - \frac{1}{2}(\operatorname{Arg}\beta + \pi) = -\pi - 1/2\,[\operatorname{Arg}\alpha + \operatorname{Arg}\beta]$$

$$= -\pi - \frac{1}{2}(2\pi - \operatorname{Arg}\gamma) = -2\pi + \frac{1}{2}\operatorname{Arg}\gamma = \frac{1}{2}\operatorname{Arg}\gamma,$$

unde $\operatorname{Arg} x$ este argumentul lui $x \in \mathbf{C}$. Am ţinut seama că

$$|\alpha| = |\beta| = |\gamma| = 1 \text{ şi } \operatorname{Arg}\alpha + \operatorname{Arg}\beta + \operatorname{Arg}\gamma = 2\pi\mathbf{Z}$$

$(\alpha\beta\gamma = 1)$.

Aşadar, triunghiul $(A'B'C')$ are unghiurile $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ respectiv egale.

21. Fie $ABCD$ un patrulater convex în care diagonalele AC şi BD sunt perpendiculare şi se intersectează în E.

Arătaţi că simetricele lui E faţă de AB, BC, CD, DA sunt puncte conciclice.

(*Concurs S.U.A – 1993*)

Soluţie. Notăm $A(a)$, $B(bi)$, $C(ci)$, $D(di)$ cu $a, b, c, d \in \mathbf{R}$. Fie M, N, P, Q simetricele lui E faţă de AB, BC, CD şi DA. Atunci:

$$m = \frac{abi}{a + bi}, \quad n = \frac{bci}{c + bi}, \quad p = \frac{cdi}{c + di}, \quad q = \frac{adi}{a + di}.$$

Calculăm:

$$\frac{p - m}{p - n} : \frac{q - m}{q - n} = \frac{b^2d^2(c - a)^2 - a^2c^2(d - b)^2}{-a^2c^2(b - d)^2} \in \mathbf{R}$$

de unde rezultă că punctele M, N, P şi Q sunt conciclice.

22. Fie ABC un triunghi. Să se găsească locul geometric al punctelor din planul triunghiului ale căror triunghiuri podare sunt echivalente.

(*Marcel Chiriţă*)

Soluţie. Luăm originea în centrul O al cercului circumscris triunghiului. Fie $M(m)$ punctul din plan şi $M_1(m_1)$, $M_2(m_2)$, $M_3(m_3)$ proiecţiile lui M pe BC, CA şi respectiv AB. Atunci avem:

$$m_1 = \frac{1}{2}(m - bc\bar{m} + b + c)$$

şi analoagele.

Notăm cu σ şi S aria triunghiului $M_1M_2M_3$ şi respectiv al triunghiului ABC. Obţinem:

$$\sigma = \frac{i}{4}\begin{vmatrix} m_1 & \bar{m}_1 & 1 \\ m_2 & \bar{m}_2 & 1 \\ m_3 & \bar{m}_3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{i}{4}\begin{vmatrix} m_2 - m_1 & \bar{m}_2 - \bar{m}_1 \\ m_3 - m_1 & \bar{m}_3 - \bar{m}_1 \end{vmatrix} = \frac{i(a - b)(b - c)(c - a)}{16abc}(1 - m\bar{m})$$

și

$$S = \frac{i(a-b)(b-c)(c-a)}{4abc}.$$

Atunci:

$$\frac{\sigma}{S} = \frac{1 - m\bar{m}}{4} = \frac{R^2 - OM^2}{4R^2},$$

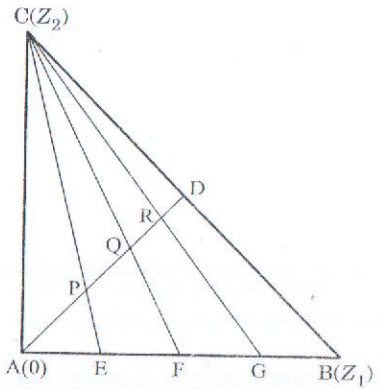
unde R este raza cercului circumscris. Rezultă că $OM^2 - R^2$ = constant, adică OM este constant, și deci locul geometric este un cerc concentric cu cercul circumscris triunghiului.

23. Fie triunghiul ABC cu $m(\sphericalangle BAC) = 90°$, D este mijlocul lui BC, F este mijlocul lui AB, E este mijlocul lui AF și G este mijlocul lui FB. Dreapta AD intersectează CE în P, CF în Q și CG în R. Determinați raportul $\frac{PQ}{QR}$.

(*Concurs Germania – 1993*)

Soluție. Fie $A(0)$, $B(z_1)$, $C(z_2)$ cu $z_1 \in \boldsymbol{R}$ și $z_2 \in \boldsymbol{C}$. Atunci $D\left(\frac{z_1 + z_2}{2}\right)$ și ecuația medianei AD este:

$$Z(\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2) - \bar{Z}(Z_1 + Z_2) = 0 \qquad (1).$$



Să rezolvăm următoarea problemă ajutătoare:
Dacă $M \in (AB)$ să calculăm afixul punctului de intersecție dintre AD și CM.
Avem $m = kz_1$ cu $k \in (0, 1)$ și ecuația dreptei CM este:

$$z(\bar{z}_2 - k\bar{z}_1) - \bar{z}(z_2 - kz_1) + kz_1(z_2 - \bar{z}_2) = 0 \qquad (2).$$

Eliminând pe $\bar{z}$ din (1) și (2) găsim că afixul punctului N,

$$n = \frac{k}{k+1}(z_1 + z_2).$$

Acum dacă $M \equiv E$, avem $k = \frac{1}{4}$ și dacă afixul punctului P este:

$$p = \frac{1}{5}(z_1 + z_2),$$

dacă $M \equiv F$, avem $k = \frac{1}{2}$ și afixul punctului Q este:

$$q = \frac{1}{3}(z_1 + z_2),$$

iar dacă $M \equiv G$, avem $k = \frac{3}{4}$ și afixul punctului R este:

$$r = \frac{3}{7}(z_1 + z_2).$$

Rezultă că:

$$\left|\frac{PQ}{QR}\right| = \left|\frac{q-p}{r-q}\right| = \left|\frac{\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right)(z_1 + z_2)}{\left(\frac{3}{7} - \frac{1}{3}\right)(z_1 + z_2)}\right| = \frac{7}{5}.$$

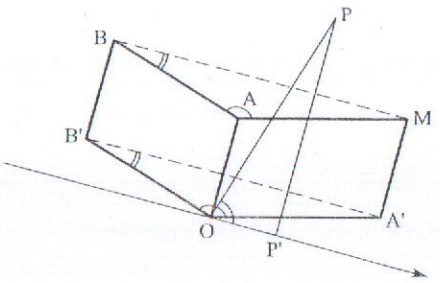
Se observă că ipoteza $m(\sphericalangle BAC) = 90°$ nu este esențială.

24. Se dau numerele complexe Z_1 și Z_2. Să se determine numerele complexe ω pentru care există $Z \in \boldsymbol{C}$ astfel încât să fie satisfăcute simultan condițiile:

$$\left|\frac{z - z_1}{z - z_2}\right| = |\omega| \text{ și } \arg\left(\frac{z - z_1}{z_2 - z_1}\right) = \arg\omega.$$

(*Dan Brânzei*)

Soluție. Fie punctele A, B, M de afixe Z_1, Z_2 respectiv Z și P de afix ω.



Din $\left|\frac{Z - Z_1}{Z - Z_2}\right| = |\omega|$ și rezultă

$$OP = \frac{MA}{MB} \qquad (1).$$

Pe de altă parte avem:

$$\arg\left(\frac{Z - Z_1}{Z_2 - Z_1}\right) = \arg(Z - Z_1) - \arg(Z_2 - Z_1) = \arg\omega \qquad (2).$$

Fie paralelogramele $OAMA'$ și $OABB'$; atunci A' și B' au afixele $Z - Z_1$ și respectiv $Z_2 - Z_1$.
Deci:

$$\arg\left(\frac{Z - Z_1}{Z_2 - Z_1}\right) = \sphericalangle B'OA'$$

și deducem imediat că și:

$$\arg\left(\frac{Z - Z_1}{Z_2 - Z_1}\right) = \sphericalangle BAM \qquad (3).$$

Din teorema sinusurilor în ΔABM avem:

$$\frac{MA}{\sin(\sphericalangle ABM)} = \frac{MB}{\sin(\sphericalangle BAM)}$$

de unde din (1) și (2) și (3) găsim că:

$$\sin(\sphericalangle ABM) = \frac{MA}{MB}\sin(\sphericalangle BAM) = OP\sin(\sphericalangle B'OA') = OP\sin(\sphericalangle POP'),$$

unde P' este proiecția lui P pe axa OX și $PP' = OP\sin(\sphericalangle POP') = \sin\sphericalangle ABM$.
Cum $\sin\sphericalangle ABM \in [-1, 1]$ rezultă că P aparține benzii cuprinse între două drepte paralele la OX și duse la distanță egală cu 1 față de OX. Deducem deci că $\omega = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, cu $|r\sin\alpha| \le 1$.

25. Fie $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \boldsymbol{C}$ cu $|z_1| = |z_2| = |z_3| = |z_4| = 1$ și $0 < \arg z_1 < \arg z_2 < \arg z_3 < \arg z_4 < \pi$. Să se arate că

$$|z_1 + z_4| < |z_2 + z_3|.$$

Soluție. Fie M_1, M_2, M_3, M_4 punctele de pe cercul unitate de afixe z_1, z_2, z_3, z_4. Fie P_1, P_2 mijloacele segmentelor (M_1M_4) și respectiv (M_2M_3). Se observă că $OP_1 < OP_2$, unde O este centrul cercului unitate. Deci

$$\left|\frac{z_1 + z_4}{2}\right| = OP_1 < OP_2 = \left|\frac{z_2 + z_3}{2}\right| \Leftrightarrow |z_1 + z_4| < |z_2 + z_3|.$$

26. Fie P un punct variabil pe cercul circumscris triunghiului ABC. Se notează cu M piciorul perpendicularei din P pe AB și cu N piciorul perpendicularei din P pe AC. Fie G_1 centrul de greutate al triunghiului OBN și G_2 centrul de greutate al triunghiului OCM. Să se arate că:

$$G_1G_2 \le \frac{BC}{3}.$$

(Marcel Chiriță)

Soluție. Alegem un sistem de coordonate cu originea în centrul cercului circumscris triunghiului ABC, astfel ca afixul punctului A să fie egal cu 1, situație ce presupune că raza cercului circumscris este egală cu unitatea. Fie

b și c afixele punctelor B și C. Fie P un punct pe cerc de afix ω. Ecuația cercului unitar în complex este $Z\bar{Z} = 1$, deci:

$$1 = b\bar{b} = c\bar{c} = \omega\bar{\omega}.$$

În continuare vom determina afixele m respectiv n ale punctelor M și N. Pentru punctul M, deoarece $PM \perp AB$, avem:

$$\frac{m - \omega}{1 - b} = ki, \text{ unde } k \in \boldsymbol{R}, \text{ deci } m = \omega + k(1 - b)i \qquad (1).$$

Ecuația dreptei ce trece prin A și B se scrie:

$$\begin{vmatrix} Z & \bar{Z} & 1 \\ b & \bar{b} & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \text{ sau } Z + b\bar{Z} - 1 - b = 0 \qquad (2)$$

unde am ținut seama de faptul că $b\bar{b} = 1$.
Înlocuind pe m în ecuația (2) obținem, după efectuarea calculelor,

$$k = \frac{1 + b - \omega - \bar{b}\bar{\omega}}{2(1 - b)i},$$

și deci, conform relației (1) obținem:

$$m = \omega + \frac{1}{2}(1 + b - \omega - b\bar{\omega}) \qquad (3).$$

Analog, se calculează n = afixul punctului N și obținem:

$$n = \omega + \frac{1}{2}(1 + C - \omega - c\bar{\omega}).$$

Afixul punctului g_1 al punctului G_1 este:

$$g_1 = \frac{1}{6}(2b + c + 1 + \omega - c\bar{\omega})$$

iar afixul g_2 al punctului G_2 este:

$$g_2 = \frac{1}{6}(2c + b + 1 + \omega - b\bar{\omega}).$$

Deci:

$$6g_1 - g_2 = (b - c) + \bar{\omega}(b - c) \Rightarrow 6(g_1 - g_2) = (b - c)(1 + \bar{\omega}) \Rightarrow$$
$$6|g_1 - g_2| \le |BC| \cdot 2 \Rightarrow 3G_1G_2 \le BC.$$

$G_1 \equiv G_2$ atunci când triunghiul este isoscel adică atunci când $AB = AC$ sau când P este punctul diametral a lui A.
$3\,G_1G_2 = AB$ atunci când $P \equiv A$.

27. Diametrul $[A_0A_5]$ împarte cercul $C(0, r)$ în două semicercuri. Pe unul din cele două semicercuri se consideră punctele A_1, A_2, A_3, A_4, așa că:

$$A_0A_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 = A_4A_5.$$

Dreapta A_1A_4 taie pe $[OA_2]$ și $[OA_3]$ respectiv în M și N. Să se arate că:

$$MN + A_2A_3 = r.$$

(Concurs U.R.S.S. – 1986)

Soluție. Alegem $r = 1$ și vom demonstra că $MN + A_2A_3 = 1$ și atunci ecuația este $Z\bar{Z} = 1$. Fie:

$$a = \cos\frac{\pi}{5} + i\sin\frac{\pi}{5}$$

și atunci alegem afixele punctelor astfel:

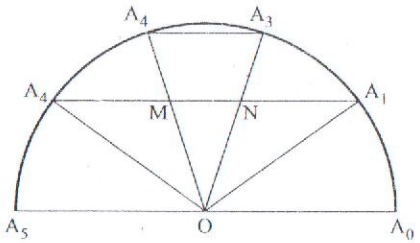
$$a_0 = 1,\ a_1 = a,\ a_2 = a^2,\ a_3 = a^3,\ a_4 = a^4,\ a_5 = a^5 = -1.$$

Ecuația dreptei A_1A_4 este:

$$Z(a^3 - 1) - \bar{Z}(a^3 - 1) + a^2 + a = 0 \qquad (1).$$

Ecuația dreptei AO_2 este:

$$Z - a^4\bar{Z} = 0$$



Eliminând între această ecuație și (1) pe $\bar{Z}$ găsim că:

$$n = \frac{a+1}{(1-a^3)(1-a^4)}.$$

În mod analog găsim că:

$$m = \frac{a+1}{(1-a^3)(1-a^6)}.$$

Mai avem de arătat că:

$$\left|\frac{a+1}{(1-a^3)(1-a^6)} - \frac{a+1}{(1-a^3)(1-a^4)}\right| + |a^3 - a^2| = 1$$

sau

$$\left|\frac{1}{1-a^3} - \frac{a}{1-a^3}\right| + |a^3 - a^2| = 1$$

sau

$$\left|\frac{1}{a^2+1+1}\right| + |a^3 - a^2| = 1$$

sau

$$1 + |(a^2 + a + 1)(a^3 - a^2)| = |a^2 + a + 1|$$

sau

$$1 + |a^2 + 1| = |a^2 + a + 1|.$$

Egalitatea se demonstrează ușor ridicând de două ori la pătrat și ținând cont că $|Z|^2 = Z\bar{Z}$ și de faptul că $a\bar{a} = 1$.

28. Considerăm un triunghi ABC și o dreaptă d variabilă, care trece prin centrul O al cercului circumscris triunghiului ABC. Proiectăm vârfurile A, B, C în A_1, B_1, C_1 pe dreapta d. Perpendicularele din A_1, B_1, C_1 pe laturile opuse sunt concurente într-un punct P. Să se determine locul geometric al punctului P.

(Marcel Chiriță)

Soluție. Luăm ca origine centrul O al cercului circumscris și determinăm dreapta d prin punctele $M(m)$, $M_1(-m)$ în care taie cercul. Ecuația dreptei d este deci:

$$\begin{vmatrix} Z & \bar{Z} & 1 \\ m & \bar{m} & 1 \\ -m & -m & 1 \end{vmatrix} = 0$$

de forma $\bar{m}Z - m\bar{Z} = 0$.

Piciorul A_1 al perpendicularei din $A(a)$ pe dreapta d este dat de:

$$3a_1 = a + \frac{m^2}{a}.$$

Ecuația dreptei BC este $Z + bc\bar{Z} - b - c = 0$ și ecuația perpendicularei din $A_1(a_1)$ pe BC este:

$$\frac{1}{b+c}\left(2Z - a + \frac{m^2}{a}\right) = \frac{bc}{b+c}\left(2\bar{Z} - \frac{1}{a} - \frac{a}{m^2}\right)$$

Obținem deci perpendiculara:

$$2Z - 2bc\bar{Z} - a + \frac{bc}{a} - \frac{m^2}{a} - \frac{abc}{m^2} = 0.$$

La fel găsim și a doua perpendiculară:

$$2Z - 2ac\bar{Z} - b + \frac{ca}{b} - \frac{m^2}{a} - \frac{abc}{m^2} = 0.$$

Eliminăm pe $\bar{Z}$ înmulțind prima ecuație cu a și pe a doua cu b și scăzându-le obținem:

$$2p = a + b + c - \frac{abc}{m^2}.$$

Din cauza simetriei expresiei p, rezultă că toate dreptele din enunț sunt concurente.

Ținând cont că:

$$2\bar{p} = \bar{a} + \bar{b} + \bar{c} - \frac{\bar{a} + \bar{b} + \bar{c}}{2}$$

și de faptul că $a\bar{a} = b\bar{b} = c\bar{c} = m\bar{m}$ obținem:

$$\left(p - \frac{a+b+c}{2}\right)\left(\bar{p} - \frac{\bar{a} + \bar{b} + \bar{c}}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

ceea ce ne arată că P descrie un cerc cu centrul în punctul de afix $\frac{a+b+c}{2}$ și de rază $\frac{1}{2}$, adică este cercul celor nouă puncte (Euler).

29. Fie A unul din punctele comune a două cercuri secante. Din A pleacă simultan, în acelaşi sens, câte un mobil pe fiecare din cercuri, cu viteze unghiulare constante, egale. Să se demonstreze că există în planul celor două cercuri un punct P astfel încât, la orice moment, dacă M şi N sunt poziţiile celor două puncte, să avem $PM = PN$.

(O.I.M. – 1979)

Soluţie. Fie O_1 şi O_2 centrele celor două cercuri şi alegem astfel sistemul încât $O_1(-1)$ şi $O_2(1)$ şi $A(a)$. Să determinăm un punct $Z(z)$. El trebuie să se afle pe mediatoarea lui (MN) la orice moment. Din condiţia de deplasare cu viteză uniformă constantă, rezultă că la momentul θ, considerând numărul complex $\omega = \cos\theta + i\sin\theta$ avem:

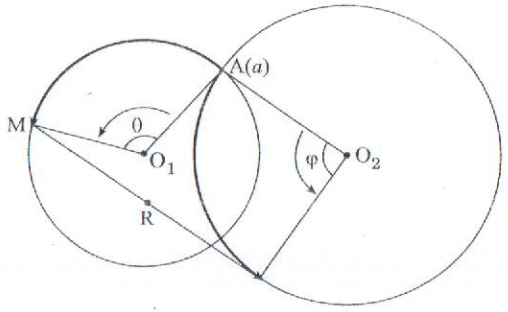
$$m = -1 + \omega(a+1) \text{ şi } n = 1 + \omega(a-1),$$

Mijlocul lui R al lui (MN) are afixul $r = \omega a$. Din condiţia $ZR \perp MN$ avem:

$$\frac{Z-p}{m-n} \in \boldsymbol{C}\setminus\boldsymbol{R} \text{ adică}$$

$$\frac{Z-\omega y}{m-n} = \frac{Z-\omega a}{2(\omega-1)} = \frac{(Z-\omega a)(\bar{\omega}-1)}{2(\omega-1)(\bar{\omega}-1)} \in \boldsymbol{C}\setminus\boldsymbol{R}.$$

Este necesar să avem $Re(Z-\omega a)(\bar{\omega}-1) = 0$. Printr-un calcul uşor şi ţinând cont că punctul P nu depinde de ω, găsim că punctul P are afixul $p = -\bar{a}$. Se observă uşor că $PM = PN$.



Observaţie. Dacă punctele pleacă în sensuri contrare atunci avem:

$$m = -1 + \omega(a+1) \text{ şi } n = 1 + \bar{\omega}(a-1)$$

şi găsim punctul P' simetricul lui P faţă de O_1O_2. Deci $P'(-a)$ şi se verifică în acest caz $P'M = P'N$.

29. Fie ABCDEF un hexagon înscris într-un cerc de rază R. Arătaţi că dacă $AB = CD = EF = R$, atunci mijloacele laturilor BC, DE şi FA sunt vârfurile unui triunghi echilateral.

(Concurs S.U.A.)

Soluţie. Notăm afixale vârfurilor hexagonului cu litere mici corespunzătoare. Dacă A are afixul a, atunci B va avea afixul $b = a\varepsilon$, unde $\varepsilon = \cos 60 + i\sin 60$, sau $\varepsilon = \cos(-60) + i\sin(-60)$ şi avem evident $\varepsilon^3 = -1$.

Din $\varepsilon^3 = -1$ rezultă că $\varepsilon^3 + 1 = (\varepsilon+1)(\varepsilon^2 - \varepsilon + 1)$ şi deci

$$\varepsilon^2 - \varepsilon + 1 = 0 \quad (1)$$

deoarece $\varepsilon = -1$.

După modul cum am calculat pe B, rezultă că afixele punctelor D şi F funcţie de afixele lui C şi E vor fi $d = c\varepsilon$ şi $f = e\varepsilon$.

Afixele punctelor M, N, P mijloacele segmentelor $|BC|$, $|DE|$ şi $|FA|$ vor fi atunci:

$$m = \frac{b+c}{2} = \frac{a\varepsilon + c}{2},\ n = \frac{d+e}{2} = \frac{c\varepsilon + e}{2},\ p = \frac{f+a}{2} = \frac{a+e\varepsilon}{2}$$

Dacă rotim segmentul $|MN|$ în sens trigonometric cu 60° în jurul lui M, atunci afixul n' al imaginii N' a punctului N va fi, ţinând cont de (1):

$$n' = m + \varepsilon(n-m) = \frac{a\varepsilon + c + c\varepsilon^2 - e\varepsilon - a\varepsilon^2 - c\varepsilon}{2} =$$

$$= \frac{-a(\varepsilon^2-\varepsilon) + c(\varepsilon^2 - \varepsilon + 1) + e\varepsilon}{2} - \frac{a+e\varepsilon}{2} = p$$

Rezulă că şi $N' = P$ şi triunghiul MNP este un triunghi isoscel, cu unghiul de la vârf de 60°, adică un triunghi echilateral.

30. Într-un triunghi ABC $(b \neq c)$ simediana AD $(D \in (BC))$, mediatoarea segmentului BC şi tangenta în C la cercul $\boldsymbol{C}$ circumscris triunghiului sunt trei drepte concurente.

Soluţie. Alegem originea sistemului, centrul cercului circumscris triunghiului ABC. Fie raza acestui cerc egală cu unitatea. Avem $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$ şi $a\bar{a} = b\bar{b} = c\bar{c} = 1$.

Ecuaţia simedianei este

$$z(b+c-2a) - a\bar{z}(ab+ac-2bc) + 2(a^2-bc) = 0 \quad (1).$$

Ecuaţia mediatoarei lui (BC) este

$$z = bc\bar{z} \quad (2).$$

Ecuaţie tangentei în C la cercul circumscris triunghiului este

$$c\bar{z} + \bar{c}z = 2 \quad (3).$$

Din (2) şi (3) avem

$$c\bar{b}\bar{c}z + \bar{c}z = 2$$

adică $z = \dfrac{2}{c\bar{b}\bar{c} + \bar{c}} = \dfrac{2bc}{b+c}$ şi atunci $\bar{z} = \dfrac{2\bar{b}\bar{c}}{\bar{b}+\bar{c}} = \dfrac{2}{b+c}$. Înlocuind în (1) avem

$$\frac{2bc}{b+c}[b+c-2a] - \frac{2a}{b+c}[ab+ac-2bc] + 2(a^2-bc) = 0$$

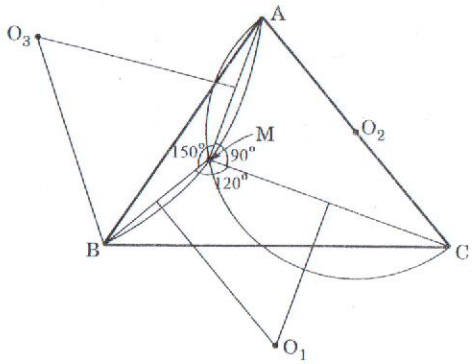
care se verifică deci dreptele cerute sunt concurente.

31. Fie M un punct interior triunghiului ABC, astfel încât $m(\sphericalangle AMC) = 90^\circ$, $m(\sphericalangle AMB) = 150^\circ$ şi $m(\sphericalangle BMC) = 120^\circ$. Centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor AMC, AMB, respectiv BMC sunt P, Q şi respectiv R. Arătaţi că $\sigma[PQR] \geq \sigma[ABC]$.

(Concurs Bulgaria - 1993)

Soluţie. Alegem ca origine punctul M. Fie $A(a)$ şi $C(c)$ cu $a, b > 0$. Atunci $B\left(-\frac{b}{2}(i-\sqrt{3})\right)$. Notăm cu p, q, r afixele P, Q şi respectiv R. Avem evident că $p = \frac{a+ci}{2}$. Din condiţia $RC = RB = RM$, obţinem $r - \bar{r} = ci$ şi $(\sqrt{3}-i)r + (\sqrt{3}+i)\bar{r} + 2b = 0$. Eliminând pe $\bar{r}$ între cele două ecuaţii obţinem că

$$r = \frac{-2b + ci\sqrt{3} - c}{2\sqrt{3}}.$$



Din condiţia ca

$$QB = QA = QM$$

obţinem $q + \bar{q} = a$ şi $(\sqrt{3}-i)q + (\sqrt{3}+i)\bar{q} + 2b = 0$. Eliminând pe $\bar{q}$ între cele două ecuaţii obţinem că

$$q = \frac{-2bi - ai\sqrt{3} + a}{2}.$$

Avem atunci

$$\sigma[ACB] = \frac{i}{4}\begin{vmatrix} a & a & 1 \\ ci & -ci & 1 \\ b & \bar{b} & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{4}(2ac + ab + bc\sqrt{3})$$

şi

$$\sigma[PRQ] = \frac{i}{4}\begin{vmatrix} p & \bar{p} & 1 \\ r & \bar{r} & 1 \\ q & \bar{q} & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{8\sqrt{3}}(2b + a\sqrt{3} + c)^2.$$

Inegalitatea de demonstrat devine

$$(2b + a\sqrt{3} + c)^2 \geq 2\sqrt{(}\,2ac + ab + bc\sqrt{3}\,)$$

care este echivalentă cu $3b^2 + (b + \sqrt{3}a - c)^2 \geq 0$, evidentă.

Observaţie. Se poate arăta uşor că $RP \perp RQ$ adică $\frac{p-r}{q-r} \in \boldsymbol{C}\setminus\boldsymbol{R}$ şi atunci

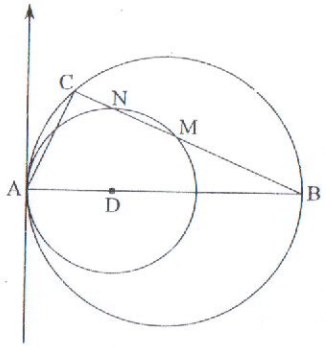
$$\sigma[PRQ] = \frac{1}{2}PR\,PQ = \frac{1}{2}|r-p|\,|q-p| = \frac{1}{8\sqrt{3}}(2b + a\sqrt{3} + c)^2.$$

32. Un triunghi dreptunghic ABC ($m(\sphericalangle ACB) = 90°$) este înscris într-un cerc. Fie H piciorul înălţimii din C pe AB şi M mijlocul laturii BC. Fie K cercul care trece prin A şi M şi este tangent la cercul γ. Cercul K intersectează a doua oară dreapta BC într-un punct N. Arătaţi că dreapta AN trece prin mijlocul segmentului CH.

(*Concurs Bulgaria* - 1993)

Soluţie. Notăm afixele punctelor cu litere mici. Alegem sistemul astfel $A(0)$, $B(1)$ şi $C(c)$ unde $b \in \mathbf{R}^+$. Din condiţia ca triunghiul ABC să fie dreptunghic, adică din $AB^2 = AC^2 + CB^2$, obţinem că

$$2c\bar{c} = c + \bar{c} \qquad (1).$$



Avem şi $h = \frac{c+\bar{c}}{2}$. Fie D centrul cercului K. Din condiţiile problemei rezultă că $D \in AB$. Din condiţia $DA = DM$ avem

$$d\bar{d} = \left(d - \frac{1+c}{2}\right)\left(\bar{d} - \frac{1+\bar{c}}{2}\right)$$

şi ţinând cont de (1) obţinem că $d = \frac{1}{4}\frac{3c\bar{c}+1}{c\bar{c}+1}$ deoarece d este real.

Ecuaţia cercului K este:

$$z\bar{z} = d(z + \bar{z})$$

iar ecuaţia dreptei BC este

$$z(1-\bar{c}) - \bar{z}(1-c) + \bar{c} - \bar{c} = 0.$$

Eliminând pe $\bar{z}$ între cele două ecuații obținem

$$z^2(\bar{c}-1)+z(c-\bar{c}-dc+d-d\bar{c}+d)-dc+d\bar{c}=0$$

Din relațiile lui Viète avem $mn=\dfrac{d(c-\bar{c})}{(1-\bar{c})}$, de unde ținând cont că $m=\dfrac{1+c}{2}$, obținem $n=\dfrac{d(c-\bar{c})}{(1-\bar{c})(1+c)}$. Fie L mijlocul lui CH atunci $l=\dfrac{3c+\bar{c}}{4}$. Condiția ca A, L și N să fie coliniare revine la faptul că

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ n & \bar{n} & 1 \\ l & \bar{l} & 1 \end{vmatrix}=0 \text{ sau } n\bar{l}-\bar{n}l=0$$

adică

$$c(3\bar{c}+c)(1+\bar{c})-\bar{c}(3c+\bar{c})(1+c)=0.$$

Efectuând calculele și ținând cont de (1) obținem $c+\bar{c}=2c\bar{c}$, adică condiția dată este îndeplinită. Deci A, L și N sunt coliniare.

33. Fie A, B, C, D și E cinci puncte în plan și M, N, P, Q și R mijloacele segmentelor (AB), (BC), (DE) și respectiv (EA). Să se demonstreze că $MQ \perp PR$ dacă și numai dacă $EN^2=MQ^2+PR^2$.

(Marcel Chiriță)

Soluție. Fie originea în punctul E și notăm cu litere mici afixele celorlalte puncte. Deci $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$, $D(d)$ și $E(o)$. Mijloacele segmentelor date vor fi

$$m=\frac{a+b}{2},\ n=\frac{b+c}{2},\ p=\frac{c+d}{2},\ q=\frac{d}{2} \text{ și } r=\frac{a}{2}.$$

Condiția ca $MQ \perp PR$ se scrie $\dfrac{m-q}{p-r}=ki$ cu $k\in\mathbf{R}^*$ sau, ținând cont că $\dfrac{\bar{m}-\bar{q}}{\bar{p}-\bar{r}}=-ki$, este echivalentă cu $(m-q)(\bar{p}-\bar{r})+(\bar{m}-\bar{q})(p-r)=0$. Rezultă că

$$(a+b-d)(\bar{c}+\bar{d}-\bar{a})+(\bar{a}+\bar{b}-\bar{d})(c+d-a)=0$$

sau

$$2a\bar{a}+2d\bar{d}=a\bar{c}+\bar{a}c+b\bar{c}+\bar{b}c-a\bar{b}-\bar{a}b+b\bar{d}+\bar{b}d-d\bar{c}-c\bar{d} \qquad (1).$$

Condiția ca $EN^2=MQ^2+PR^2$ se scrie

$$|e-n|^2=|m-q|^2+|p-r|^2$$

sau

$$|b+c|^2=|a+b-d|^2+|c+d-a|^2$$

sau

$$(\bar{b}+\bar{c})(b+c)=(a+b-d)(\bar{a}+\bar{b}-\bar{d})+(c+d-a)(\bar{c}+\bar{d}-\bar{a})$$

sau

$$2a\bar{a}+2d\bar{d}=a\bar{c}+\bar{a}c+b\bar{c}+\bar{b}c-a\bar{b}-\bar{a}b+b\bar{d}+\bar{b}d-d\bar{c}-c\bar{d}$$

adică (1). Rezultă că $MQ \perp PR \Leftrightarrow EN^2=MQ^2+PR^2$.

34. Să se arate că dacă sunt adevărate egalitățile

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=0 \text{ și } \cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=0$$

atunci sunt adevărate și egalitățile

$$\sin n\alpha+\sin n\beta+\sin n\gamma=0 \text{ și } \cos n\alpha+\cos n\beta+\cos n\gamma=0$$

oricare ar fi numărul natural n, nedivizibil cu 3.

(Marcel Chiriță)

Considerăm numerele complexe:

$$z_1=\cos\alpha+i\sin\alpha,\ z_2=\cos\beta+i\sin\beta,\ z_3=\cos\gamma+i\sin\gamma.$$

Potrivit condițiilor date, avem

$$z_1+z_2+z_3=0 \text{ și } \bar{z}_1+\bar{z}_2+\bar{z}_3=0.$$

Dar $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$, deci $\bar{z}_k=\dfrac{1}{z_k}$, $k=1, 2, 3$. Atunci

$$\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+\frac{1}{z_3}=0 \text{ sau } z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1=0$$

Notând $z_1z_2z_3=a$, rezultă că numerele z_1, z_2, z_3 sunt rădăcinile ecuației de gradul trei $z^3-a=0$ și, prin urmare, $z_k^3=a$, $k=1, 2, 3$.

Notăm $s_1=\cos n\alpha+\cos n\beta+\cos n\gamma$ și $s_2=\sin n\alpha+\sin n\beta+\sin n\gamma$ și avem

$$s_1+is_2=z_1^n+z_2^n+z_3^n=\sum_{k=1}^{3}z_k^n.$$

Dar $n=3m+\gamma$, $m\in\mathbf{N}$, $\gamma\in\{1, 2\}$, numărul nefiind divizibil cu 3, atunci

$$s_1+is_2=\sum_{k=1}^{n}z_k^{3m-n}=\sum_{k=1}^{3}(z_k^3)^m z_k^\gamma=p^m\sum_{k=1}^{n}z_k^\gamma$$

Pentru $n=1$ avem $\sum_{k=1}^{3}z_k^2=\sum_{k=1}^{3}z_k=0$ iar pentru $n=2$ avem

$$\sum_{k=1}^{3}z^n=z_1^2+z_2^2+z_3^2=(z_1+z_2+z_1)^2-2(z_1z_2+z_2z_3+z_1z_3)=0.$$

Așadar, $s_1+is_2=0$, de unde $s_1=s_2=0$.

Capitolul XII

PROBLEME PROPUSE

1. Să se demonstreze că dacă G este punctul de întâlnire a medianelor unui triunghi ABC şi M un punct oarecare din plan, avem:

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2.$$

Să se deducă de aici că dacă ABC este un triunghi echilateral cu latura 1, atunci $MA^2 + MB^2 + MC^2 \geq 1$.

2. Se consideră un triunghi echilateral ABC de latură 1 şi punctele $A_1 \in (BC)$, $B_1 \in (AC)$, $C_1 \in (AB)$. Să se arate că:

$$A_1B_1^2 + B_1C_1^2 + C_1A_1^2 \geq \frac{3}{4}.$$

3. Fie un triunghi ABC şi un punct M în planul său. Notăm cu $s(M)$ suma pătratelor distanţelor punctului M la laturile triunghiului şi cu $S(M)$ suma pătratelor distanţelor punctului M la vârfurile triunghiului. Să se arate că $4s(M) \geq S(M)$ pentru orice punct M din plan dacă şi numai dacă triunghiul ABC este echilateral.

(Laurenţiu Panaitopol)

4. Se consideră un trapez circumscris unui cerc de rază r. Să se arate că $d_1^2 + d_2^2 \geq 16r^2$ unde d_1 şi d_2 sunt lungimile diagonalelor trapezului.

5. Să se determine numărul natural nenul n astfel încât egalitatea:

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_2 + z_3|^2 + \ldots + |z_{n-1} + z_n|^2 + |z_n + z_1|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + \ldots$$
$$\ldots + |z_n|^2 + |z_1 + z_2 + \ldots + z_n|^2$$

să aibe loc pentru orice numere complexe $z_1, z_2, \ldots, z_n$.

a) Utilizând rezultatul găsit, să se arate că dacă ABC este un triunghi oarecare, G centrul său de greutate, A_1, B_1, C_1 mijloacele laturilor $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$ şi M un punct din planul triunghiului, atunci are loc identitatea:

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 + 9MG^2 = 4(MA_1^2 + MB_1^2 + MC_1^2).$$

(Dumitru Acu)

6. Fie $z_1, z_2, z_3 \in \mathbf{C}$ astfel încât:

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0 \text{ şi } |z_1| = |z_2| = |z_3| = 1.$$

Să se arate că dacă $z_1 + z_2 + z_3 \neq 0$, atunci $|z_1 + z_2 + z_3| = 2$.

a) Să se determine toate tripletele (z_1, z_2, z_3) care îndeplinesc condiţiile enunţului.

(Marian Andronache şi Florin Vulpescu)

7. Fie $n > 2$ un număr natural şi $z \in \mathbf{C} - \{1\}$ astfel încât $z^n = 1$.

a) Să se arate că: $|1 - z| > \frac{2}{n-1}$;

b) Să se arate că pentru orice $k \in \mathbf{Z}$, k nedivizibil cu n, are loc inegalitatea:

$$\left|\sin\frac{k\pi}{n}\right| > \frac{1}{n-1}.$$

(Laurenţiu Panaitopol)

8. Fie $z_1, z_2, z_3 \in \mathbf{C}^*$.

a) Dacă:

$$|z_1| = |z_2| = |z_3| \text{ atunci } z_1 + z_2 + z_3 = 0$$

dacă şi numai dacă $z_1z_2 + z_2z_3 + z_1z_3 = 0$;

b) Dacă:

$$z_1 + z_2 + z_3 = z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1 = 0 \text{ atunci } |z_1| = |z_2| = |z_3|.$$

(Florin Vulpescu)

9. Fie $a, b \in \mathbf{R}$. Să se determine maximul expresiei $|z^2 + az + b|$ unde $z \in \mathbf{C}$ şi $|z| = 1$.

(Marcel Chiriţă)

10. Fie a, b, c, d, m numerele complexe date astfel ca

$$|a| = |b| \neq 0 \text{ şi } |c| = |d| \neq 0.$$

Să se arate că ecuaţia:

$$c(bz + am)^n - d(ax + bm)^n = 0, \quad n \in \mathbf{N} - \{0\}$$

are numai rădăcini reale.

11. Se dau punctele A şi B de afixe:

$$a = 1 + i \text{ şi respectiv } b = 1 + \sqrt{3} + 2i.$$

Să se determine:

a) Afixele punctelor N aşa încât triunghiul ABN să fie echilateral.

b) Afixele punctelor M aşa încât $m(\sphericalangle BAM) = 45^\circ$ şi $AB = AM$.

12. Arătaţi că ecuaţia $(z - ia)^n - (z + ia)^n = 0$, unde $n \in N$, $n \geq 2$ şi a este un număr real nenul, are toate rădăcinile reale.

13. În triunghiul ABC fie $D \in (AB)$. Notăm $F = BD \cap CE$. Se consideră următoarele afirmaţii:

a) BD este bisectoare;

b) CE este mediană;

c) $\frac{BF}{FD} = \frac{BC + AB}{BC}$.

Să se demonstreze că din oricare două afirmaţii rezultă a treia.

(M. Chiriţă)

14. În triungiul ABC se consideră bisectoarele BB' şi CC', $B' \in (AC)$, $C' \in (AB)$. Fie B'' mijlocul segmentului (BB') şi C'' mijlocul segmentului (CC'). Să se arate că dreptele $C'B''$, $B'C''$ şi BC sunt concurente dacă şi numai dacă $m(\sphericalangle A) = 60^\circ$.

15. Fie D, E, F picioarele înălţimilor triunghiului ABC. Să se demonstreze că dacă pentru orice punct M din plan, diferit de D, E, F, paralelele din A, B, C respectiv la MD, ME, MF sunt concurente, atunci triunghiul este echilateral.

(D.M. Bătineţu-Giurgiu)

16. Fie O intersecţia diagonalelor $[AC]$ şi $[BD]$ ale patrulaterului $ABCD$ şi $M \in (BC)$, $N \in (DC)$ astfel încât $BM = k \cdot MC$, $DN = k \cdot NC$ şi $AO = k \cdot OC$. Să se arate că dacă $AM + AN = m$ atunci:

$$8k(k+2)\sigma[ABCD] \leq m^2(k+1)^3.$$

(Marcel Chiriţă)

17. Se consideră triunghiul ABC şi bisectoarele AM, BN, $M \in (BC)$, $N \in (AC)$ care se intersectează în O. Ştiind că $AO = \sqrt{3} \cdot OM$ şi $2BO = (\sqrt{3}+1)ON$, să se afle unghiurile triunghiului.

18. Fie ABC un triunghi oarecare şi I un punct din interiorul triunghiului. Prin punctul I se duc drepte paralele la laturile triunghiului care intersectează pe (BC), (CA), (AB) respectiv în punctele S, P, N, R, Q, M. Să se arate că:

$$E = \frac{MN}{BC} + \frac{PQ}{CA} + \frac{RS}{AB}$$

nu depinde de poziţia lui I.

19. În triunghiurile ABC şi DEF fie M şi N respectiv mijloacele laturilor BC şi EF. Dacă $\sphericalangle A = \sphericalangle D$, $AB + AC = DE + DF$ şi $AM = DN$ atunci triunghiurile sunt congruente.

(Marcel Chiriţă)

20. Bisectoarele (AD), (BE), (CF) ale triunghiului ABC sunt concurente în punctul I. Să se arate că dacă:

$$\max\left\{\frac{ID}{AD}, \frac{IE}{BE}, \frac{IF}{CF}\right\} = \frac{1}{3}$$

atunci triunghiul este echilateral.

(D.M. Bătineţu-Giurgiu)

21. Fie M mijlocul înălţimii AA' a triunghiului dreptunghic ABC şi N mijlocul segmentului $A'C$. Să se demonstreze că $BM \perp AN$.

22. Fie $ABCD$ un paralelogram cu diagonalele AC şi BD.

a) Să se arate că $AC^2 + BD^2 = 2(AB^2 + AD^2)$

b) Presupunând că $AC^2 \cdot BD^2 = AB^4 + AD^4$ să se calculeze măsura unghiului obtuz al paralelogramului.

23. Se dă triunghiul oarecare ABC şi se consideră punctul $D \in (BC)$ aşa încât $BC = 3DC$. Se notează cu E mijlocul medianei $[CC']$. Să se arate că punctele A, D şi E sunt coliniare.

24. În triunghiul dreptunghic ABC ($A = 90°$) fie $D \in (BC)$. Bisectoarele unghiurilor ADB şi ADC intersectează laturile (AB) şi (AC) respectiv în E şi F. Să se arate că:

$$AB \cdot AE + AC \cdot AF = AD \cdot BC.$$

25. Fie ABC un triunghi, M şi N mijloacele laturilor $[BC]$, $[AC]$ şi $P \in (AB)$ astfel încât $PA = 2PB$. Fie $G = BN \cap AM$ şi $Q = BN \cap CP$. Dacă $BM \cdot BP = BQ \cdot BG$ să se arate că AB este perpendiculară pe BC dacă şi numai dacă $AB = BC$.

(D.M. Bătineţu-Giurgiu)

26. Să se determine pe latura AC a unui triunghi ABC punctul M pentru care suma $BM^2 + CM^2$ este minimă.

27. Fie un triunghi ABC şi punctele $M \in (AB)$, $N \in (AC)$, astfel încât lungimile tangentelor duse din B şi C la cercul circumscris triunghiului AMN să fie egale. Să se arate că mijloacele segmentelor (AB), (AC), (BN) şi (CM) sunt puncte conciclice.

28. Se dau în plan un cerc $\mathcal{C}(O, R)$ şi un punct $A \neq O$, $A \notin \mathcal{C}(O,R)$. Fie $M \in \mathcal{C}(O, R)$ şi P mijlocul segmentului $[AM]$. Să se afle locul geometric al lui P atunci când M descrie cercul $\mathcal{C}(O, R)$.

29. În interiorul cercului $\mathcal{C}(O, R)$ se consideră $A \neq O$. Fie (BC) coarda perpendiculară pe (OA) în A. Să se arate că dacă $M \in \mathcal{C}(O, R)$ atunci $m(\sphericalangle AMO) \leq m(\sphericalangle ABO)$.

30. În cercul $\mathcal{C}(O, R)$ se consideră doi diametri perpendiculari (AB) şi (CD). Fie $M \in (AO)$. Dreapta CM taie cercul în N. Tangenta în N la cerc se intersectează cu paralela prin M la CD în P.

a) Să se arate că $OMNP$ este trapez isoscel.

b) Să se afle locul geometric al punctului Q de intersecţie a dreptelor ON şi MP, când M parcurge (AO).

31. Fie $[AB]$ un diametru fix al cercului $\mathcal{C}(O, R)$ şi M un punct mobil pe cerc. Tangenta în M la cerc intersectează dreapta AB în N. Să se afle locul geometric al centrului cercului înscris în triunghiul ONM.

32. Se dă triunghiul ABC în care $\operatorname{tg} A = 3$ şi $\operatorname{tg} B = 2$. Să se arate că ortocentrul triunghiului coincide cu mijlocul înălţimii $[AA']$.

33. Fie O centrul cercului $\mathcal{C}$ circumscris triunghiului oarecare ABC. Tangenta în B la $\mathcal{C}$ intersectează dreapta AC în D. Cercul circumscris triunghiului BCD intersectează a doua oară dreapta AB în E. Să se arate că:

a) Dreapta DE este tangentă cercului circumscris triunghiului ACE;

b) Dreptele AO şi DE sunt perpendiculare.

34. Să se demonstreze că dacă a şi b sunt două numere complexe astfel încât $tb + (1-t)b \neq 0$ pentru orice $t \in [0, 1]$ şi $Re(\frac{a}{b}) \geq 0$, atunci:

$$Re\left(\frac{ab}{(tb+(1-t)a)^2}\right) > 0,$$

oricare ar fi $t \in (0, 1)$.

35. Fie $a, b, c \in \mathbf{C}$. Arătaţi că:

$$|a| = |b+c|, \quad |b| = |c+a|, \quad |c| = |a+b| \Leftrightarrow a + b + c = 0.$$

36. Fie: $z = \frac{1}{2} + \omega + \omega^2 + \ldots + \omega^n$, unde:

$$\omega = \cos\frac{2\pi}{2n+1} + i\sin\frac{2\pi}{2n+1}, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Să se demonstreze că:

a) $Im(z^{2k}) = 0$, $Re(z^{2k+1}) = 0$, pentru orice $k \in \mathbf{N}$;

b) $(2z+1)^{2n+1} + (2z-1)^{2n+1} = 0$.

37. Fie $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbf{C}$ cu

$$|z_1| = |z_2| = |z_3| = |z_4| = 1 \text{ şi}$$

$$0 < \arg z_1 < \arg z_2 < \arg z_3 < \arg z_4 < \pi.$$

Să se arate că:

$$|z_1 + z_4| < |z_2 + z_3|.$$

(Dorin Andrica)

38. Fie $a, b, c \in \mathbf{C}$. Să se demonstreze că:

a) Dacă $Re(az + bz) \geq 0$, $(\forall)\, z \in \mathbf{C}$, atunci $b = -a$;

b) Dacă $Im(az + bz) \geq 0$, $(\forall)\, z \in \mathbf{C}$, atunci $b = a$;

c) Dacă $Re(az^2 + bz + c) \geq 0$, $(\forall)\, z \in \mathbf{C}$, atunci $b = a = 0$.

(Marcel Chiriţă)

39. Dacă numerele complexe $z_1, z_2, \ldots, z_n$ au acelaşi modul, atunci există relaţia:

$$(z_1 + \bar{z}_2)(z_2 + \bar{z}_3)\ldots(z_n + \bar{z}_1) = (z_1 + \bar{z}_n)(z_n + \overline{z_{n-1}})\ldots(z_2 + \bar{z}_1)$$

(Virgil Nicula)

40. Fie $z \in \mathbf{C}^*$ astfel încât: $\left|z^3 + \frac{1}{z^3}\right| \leq 2$.

Să se arate că: $\left|z + \frac{1}{z}\right| \leq 2$.

41. În triunghiul ABC se consideră medianele AA_1, BB_1, CC_1 şi O centrul cercului circumscris triunghiului. Să se arate că cercurile circumscrise triunghiurilor AOA_1, BOB_1, COC_1 au un punct comun diferit de O.

42. Fie $AA_1, A_1 \in (BC)$, bisectoarea unghiului A al triunghiului ABC. Cercul circumscris triunghiului AA_1B intersectează dreapta AC a doua oară în punctul $N \in (AC)$ iar cercul circumscris triunghiului AA_1C intersectează dreapta AB a doua oară în punctul $M \in (AB)$. Să se arate că $MB = NC$.

43. Fie A_1, B_1, C_1 punctele diametral opuse vârfurilor triunghiului ABC în cercul circumscris triunghiului. Să se demonstreze că tangentele în A_1, B_1, C_1 la cercul circumscris intersectează dreptele BC, CA, AB în trei puncte coliniare.

44. Să se demonstreze că un triunghi este echilateral dacă şi numai dacă are acelaşi centru de greutate ca şi triunghiul său ortic.

45. Fie AM, BN, CP lungimile înălţimii, bisectoarei şi respectiv medianei în triunghiul ascuţitunghic ABC. Să se demonstreze că dacă $MC = NA = PB$, atunci triunghiul ABC este echilateral.

46. În triunghiul ascuţitunghic în care $m(\sphericalangle A) = 60^\circ$ şi $BH = OI$, să se determine măsura unghiurilor B şi C ale triunghiului ABC.

(Marcel Chiriţă)

47. Fie $ABCDEFG$ un heptagon regulat înscris în cercul de rază R. Dacă A_1 este punctul diametral opus lui A, să se arate că distanţele A_1B, A_1C, A_1D satisfac egalitatea:

$$A_1B - A_1C + A_1D = R.$$

48. Fie z_1, z_2, z_3 trei numere complexe, astfel încât:

$$|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1.$$

Să se arate că:

$$|z_1 - z_2| + |z_2 - z_3| + |z_3 - z_1| \geq |z_1 - z_2| \cdot |z_2 - z_3| \cdot |z_3 - z_1|,$$

şi să se precizeze când are loc egalitatea.

49. Fiind date triunghiurile ABC şi $A'B'C'$, să se arate că

$$aa' + bb' + cc' \leq 9(RR' - GO \cdot G'O'),$$

notaţiile fiind cele cunoscute. Generalizare.

(Laurenţiu Panaitopol)

50. Fie M un punct în interiorul unui triunghi echilateral ABC de latură de lungime 1. Să se arate că:

$$MA \cdot MB + MB \cdot MC + MC \cdot MA \geq 1.$$

(Marcel Chiriţă)

51. Să se arate că:

$$\sum_{k=1}^{n} |z - z_k|^2 \geq n(|z| - 1)^2,\ (\forall)\, z, z_k \in \mathbb{C} \text{ cu } |z_k| = 1,\ k \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

(Mircea Ganga)

52. Tangentele în punctele A şi B la cercul circumscris triunghiului ABC se intersectează în punctul S. Fie $\{M\} = [SC] \cap [AB]$. Să se arate că:

$$\frac{AM}{MB} = \frac{AC^2}{BC^2}.$$

53. Fie triunghiurile $A_1B_1C_1$; $A_2B_2C_2$; $A_3B_3C_3$ asemenea între ele. Fie G_1, G_2, G_3 centrele de greutate ale triunghiurilor $A_1A_2A_3$, $B_1B_2B_3$, $C_1C_2C_3$. Dovediţi că triunghiul $G_1G_2G_3$ este asemenea cu triunghiurile $A_kB_kC_k$, $k = 1, 2, 3$. Generalizare.

(Marian Dincă)

54. Fie cercurile $C_1(O_1, R_1)$ şi $C_2(O_2, R_2)$ şi două puncte M_1 şi M_2 pe cercul C_1 respectiv C_2. Să se afle locul geometric al punctului M_3 astfel încât triunghiul $M_1M_2M_3$ să fie asemenea cu triunghiul dat, ştiind că $O_1M_1 \parallel O_2M_2$.

(Marian Dincă)

55. Fie un triunghi oarecare ABC şi M, N, P trei puncte situate pe laturile AB, BC, CA astfel încât $MA/MB = NB/NC = PC/PA$. Fie:

$$AN \cap CM = X,\ CM \cap BP = Y,\ BP \cap AN = Z.$$

Demonstraţi că triunghiul XYZ este echilateral dacă şi numai dacă triunghiul ABC este echilateral.

(Marian Dincă)

56. Fie un triunghi oarecare ABC şi G un punct în interiorul său. Dreptele AG, BG, CG intersectează cercul circumscris triunghiului în punctele P, Q, R. Demonstraţi că G este centrul de greutate al triunghiului PQR dacă şi numai dacă triunghiul ABC este echilateral.

(Constantin Cocea)

57. Fie un triunghi oarecare ABC şi G centrul său de greutate. Demonstraţi că $1/AG$; $1/BG$; $1/CG$ sunt lungimile laturilor unui triunghi.

(Marian Dincă)

58. Fie T punctul lui Toricelli al triunghiului oarecare ABC (centru izogon). Dovediți că:

$$OT^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 4S\sqrt{3}.$$

(Ion Tomescu)

59. Fie un triunghi oarecare ABC și P un punct situat în planul său. Dreptele AP, BP, CP intersectează cercul circumscris triunghiului ABC în punctele A_1, B_1, C_1. Dovediți că:

$$\frac{\sigma[A_1B_1C_1]}{\sigma[ABC]} = \frac{|(R^2 - OP^2)|}{PA^2PB^2PC^2}.$$

60. Fie $ABCD$ un patrulater convex. Să se demonstreze că $ABCD$ este dreptunghi dacă și numai dacă oricare ar fi M și N două puncte din planul triunghiului avem:

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{CN} = \overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{DM} \cdot \overrightarrow{DN}.$$

(Marcel Chiriță)